Pro-Nilpotente Lie-Algebren

von
Mohamed Barakat

Diplomarbeit im Fach Mathematik
vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule
Aachen

Oktober 1997

angefertigt am
Lehrstuhl B für Mathematik
bei Prof. Dr. W. Plesken

Vorwort

Die Idee für dieses Thema stammt von Prof. Dr. W. Plesken, der mich während der Bearbeitungszeit und vorher bestens betreut hat. Dafür, für sein Vertrauen und für seine Geduld bedanke ich mich herzlich bei ihm. Meinen Professoren Prof. Dr. J. Neubüser und Prof. Dr. V. Enß bin ich ebenfalls zu großem Dank verpflichtet.

Mein Dank gilt auch meinen Kollegen und Freunden des Lehrstuhls B für Mathematik, insbesondere Rachel Camina, Gundel Klaas und Tilman Schulz für die schönen privaten und regen fachlichen Diskussionen.

Ich bedanke mich auch herzlich bei meinen Eltern, die mir immer ein Rückhalt waren und mir ein Auslandsstudium ermöglicht haben; bei Familie Fessler dafür, daß sie mich so warm aufgenommen hat und für mich meine Familie im Ausland ist.

Meinen besonderen Dank richte ich an meine Schwester Aliaa und meine Freundin Irene, die mich während meiner Studienzeit unterstützt und bestärkt haben. Ohne sie wäre mein Studium nicht so entspannt und vielseitig gewesen.

Mohamed Barakat

Einleitung

Die Klassifikation der endlichen p-Gruppen scheint, verglichen mit der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen, ein nahezu unerreichbares Ziel zu sein. Jede endliche p-Gruppe P ist nilpotent, deshalb kann man von der *Nilpotenzklasse* $c = \mathrm{cl}(P)$ einer p-Gruppe reden. Die Einteilung von p-Gruppen hinsichtlich ihrer Nilpotenzklasse führt nicht zu einer vernünftigen Klassifikation. Selbst für $c = 2$ ist dies eine schwierige Aufgabe. Eine sinnvolle Alternative ist der Begriff der *Koklasse*:

0.0.1 Definition (Koklasse)
Sei P eine p-Gruppe der Ordnung p^n mit $\mathrm{cl}(P) = c$. $\mathrm{cocl}(P) = k := n - c$ nennt man die *Koklasse* von P.

Leedham-Green und andere [LGMc] haben gezeigt, daß die Klassifikation von p-Gruppen zu einer festen, zumindest kleinen, Koklasse ein angreifbares Problem ist. Von Plesken und Holt [HoPl93] stammt eine wichtige Verallgemeinerung des Koklassenbegriffs:

0.0.2 Definition (p-Koklasse)

1. Sei G eine endliche Gruppe und $N := O_p(G)$ der maximale p-Normalteiler. Definiere $Q := G/N$.

$$Q\text{-}p\text{-}\mathrm{cocl}(G) = Q\text{-}\mathrm{cocl}_p(G) = \mathrm{cocl}_p(G) := f - c,$$

   wobei f die Anzahl der Q-Kompositionsfaktoren und c die Nilpotenzklasse von N sind.

2. Sei G eine pro-endliche[1] Gruppe mit einem maximalen pro-p-Normalteiler[2] N von *endlichem* Index und $Q := G/N$ die endliche Faktorgruppe. Die p-Koklasse von G ist durch

$$\mathrm{cocl}_p(G) := \lim_{i\to\infty} \mathrm{cocl}_p(G/\gamma_i(N))$$

   definiert[3], wobei $\gamma_i(N)$ die Glieder der absteigenden Zentralreihe von N sind.

[1] D.h. inverser Limes von endlichen Gruppen.
[2] D.h. inverser Limes von endlichen p-Gruppen.
[3] ∞ ist miteingeschlossen

Die „Koklasse“ ergibt sich als Spezialfall für $Q = 1$. Da jede Gruppe der Ordnung p^2 abelsch ist, ist $\mathrm{cocl}(P) > 0$ für jede p-Gruppe P mit $|P| > p$. Für $Q \neq 1$ ist dagegen $\mathrm{cocl}_p = 0$ möglich:
Man nehme etwa $Q = A_5$. A_5 hat genau 3 irreduzible $\mathbb{F}_2 A_5$-Moduln, die man mit 2^1, 2^4 und $2^{4'}$ bezeichnet, um direkt auch ihre Dimensionen anzudeuten. 2^1 ist der triviale Modul, 2^4 kommt von einer 2-dimensionalen Darstellung von A_5 über $\mathbb{F}_4$ ($A_5 \cong SL_2(\mathbb{F}_4)$) und $2^{4'}$ ist der irreduzible nicht-triviale Konstituent des natürlichen Permutationsmoduls P von A_5: $P \cong 2^1 \oplus 2^{4'}$. Man stellt fest:

0.0.3 Satz
Es gibt genau 6 Gruppen mit A_5-$cocl_2 = 0$ und alle sind endlich. *Dabei haben die maximalen p-Normalteiler eine Nilpotenzklasse* $\mathrm{cl} \leq 2$.

Anhand des folgenden Diagramms 1, werden alle 6 Gruppen angedeutet:

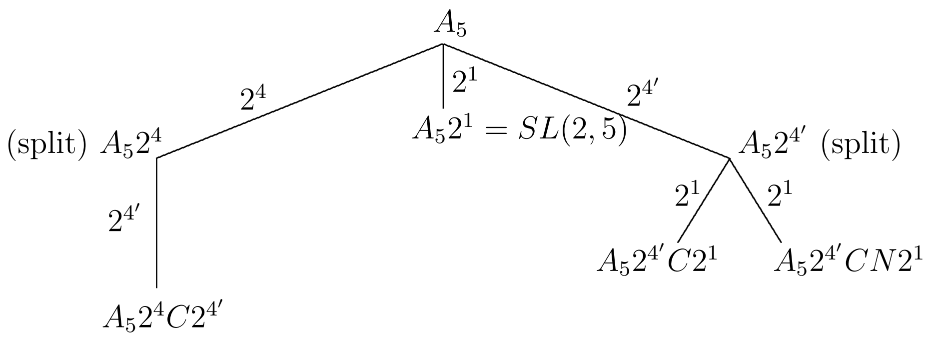

Abbildung 1: Gruppen mit A_5-2-cocl=0

Läßt man dagegen $k = \mathrm{cocl}_2 = 1$ zu, so kann es sogar bei $A_5 2^1 \cong SL(2,5)$ (siehe Diagramm) ad infinitum absteigen[4]. Es gibt aber durchaus pro-endliche (unendliche) Beispiele mit $k = 0$. Beispielsweise hat die pro-endliche Gruppe $SL(3, \mathbb{Z}_2)$ die $SL(3,2)$-2-cocl = 0. Selbst für $Q = SL(2,5)$ über $\mathbb{F}_5$ existiert ein pro-endliches Beispiel der Koklasse Null (vgl. [HoPl93]).

Ziel dieser Arbeit ist, die Begriffsbildung der Koklasse auf nilpotente Lie-Algebren zu übertragen, wo zusätzlich eine endliche Gruppe als Gruppe von Automorphismen operiert. Dies führt zum Begriff der *Lie-Koklasse*. Es werden pro-endliche Beispiele von kleiner Lie-Koklasse konstruiert.

Diese Arbeit besteht aus 3 Kapiteln. In Kapitel 1 werden die Grundlagen aus der Theorie der Lie-Algebren vorgestellt. In Kapitel 2 wird der zentrale Begriff der *Graduierung* eingeführt. In Kapitel 3 werden pro-nilpotente Lie-Algebren von Koklasse 0 und 1 behandelt.

[4] Man betrachte dafür die beiden 4-dimensionalen $\mathbb{Z}_2 SL(2,5)$-Gitter.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Lie-Algebren

Lie-Algebren traten historisch als „infinitesimale" Erzeuger von Transformationsgruppen auf. Sie wurden deswegen meistens als Vektorfelder dargestellt. Die Rolle der *Jacobi-Identität* wurde schnell erkannt, was schließlich zur Definition von abstrakten Lie-Algebren führte.

1.1 Die Jacobi-Identität

In diesem Abschnitt werden die elementaren Definitionen und Sätze über Lie-Algebren zusammengefaßt, die im weiteren benötigt werden. $\mathbb{K}$ ist entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

1.1.1 Definition (Lie-Algebra)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\mathfrak{g}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine $\mathbb{K}$-bilineare Abbildung, mit

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (Antikommutativität)

(ii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi-Identität)

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Dann nennt man $\mathfrak{g}$ eine $\mathbb{K}$-*Lie-Algebra*. $[\cdot,\cdot]$ nennt man das Lie-Produkt oder die Lie-Klammer.

Es gibt zwei interessante Interpretationen der Jacobi-Identität. Für die erste führen wir den Begriff der Derivation ein:

1.1.2 Definition (Derivation)
Sei A ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\cdot : A \times A \to A$ eine $\mathbb{K}$-bilineare Abbildung (A sei also eine $\mathbb{K}$-Algebra). Eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\delta : A \to A$ mit

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b) \text{ für alle } a, b \in A$$

heißt eine $\mathbb{K}$-*Derivation* von A.

Die erste Interpretation lautet:

1.1.3 Lemma
Sei $\mathfrak{g}$ eine $\mathbb{K}$-Algebra mit antikommutativer Produktabbildung $[\cdot,\cdot]$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. *$[\cdot,\cdot]$ erfüllt die Jacobi-Identität.*

2. *$[X,\cdot]$ ist eine $\mathbb{K}$-Derivation von $\mathfrak{g}$, für alle $X \in \mathfrak{g}$.*

Für die zweite Interpretation folgt eine Zwischenbetrachtung, die zeigt, warum assoziative Algebren und Lie-Algebren vom darstellungstheoretischen Standpunkt aus ausgezeichnet sind. Der eilige Leser kann bei Abschnitt 1.2 fortfahren.

1.1.4 Definition (Wortprodukt)
Sei $w = w(x,y) = \alpha x \cdot y + \beta y \cdot x$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, das allgemeine $\mathbb{K}$-bilineare Wort in zwei Unbestimmten[1]. Für eine beliebige $\mathbb{K}$-Algebra $(A,\cdot)$ induziert w ein neues Algebrenprodukt, das sog. *Wortprodukt*:

$$A \times A \to A;\; (a,b) \mapsto a \cdot_w b := w(a,b)$$

$(A,\cdot_w)$ ist ebenfalls eine $\mathbb{K}$-Algebra.

1.1.5 Definition (Algebra bezüglich w)
Sei $(A,\cdot)$ eine $\mathbb{K}$-Algebra und bezeichne $L(a) : A \to A;\; b \mapsto a \cdot b$ die Linksmultiplikation mit a.[2] Sei weiter $w = w(x,y)$ ein $\mathbb{K}$-bilineares Wort und $\circ_w$ das induzierte Wortprodukt auf $End_{\mathbb{K}}(A)$. Gilt

$$L(a \cdot b) = L(a) \circ_w L(b),$$

so heißt A eine $\mathbb{K}$-*Algebra bezüglich* w.

Anhand von zwei Beispielen, wird diese Definition erläutert.

1.1.6 Beispiel

1. Für eine $\mathbb{K}$-Algebra $(A,\cdot)$ bezüglich w sind äquivalent:
   (a) $w(x,y) = x \cdot y$.
   (b) A ist eine assoziative Algebra.

2. Für eine $\mathbb{K}$-Algebra $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ bezüglich w mit *antikommutativer Multiplikation* sind äquivalent:
   (a) $w(x,y) = x \cdot y - y \cdot x$.
   (b) $\mathfrak{g}$ ist eine Lie-Algebra, d.h. $[\cdot,\cdot]$ erfüllt die Jacobi-Identität.

---
[1] x und y sind als freie Erzeuger einer freien *nicht* assoziativen Algebra aufzufassen.
[2] $L(a)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum-Endomorphismus von A.

Beispiel 2 ist gleichzeitig die zweite Interpretation der Jacobi-Identität, die in Korollar 1.1.13 eine vertrautere Form annimmt.

Daß genau die beiden Beispiele in 1.1.6 darstellungstheoretisch ausgezeichnet sind, wird nun präzisiert.

1.1.7 Lemma
Sei $w = w(x, y) = \alpha x \cdot y + \beta y \cdot x$ $(\alpha, \beta \in K)$ ein $\mathbb{K}$-bilineares Wort, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *Für jede* assoziative $\mathbb{K}$-*Algebra* A*, ist* $(A, \cdot_w)$ *eine* $\mathbb{K}$-*Algebra bezüglich* w.

2. $(\alpha, \beta) \in \{(0, 0), (1, 0), (1, -1)\}$.

Beweis. Man nehme für die Hinrichtung etwa die freie assoziative Algebra auf 3 Elementen a, b, c und setze $L_w(a \cdot_w b)(c) = (L_w(a) \cdot_w L_w(b))(c)$, wobei L_w die Linksmultiplikation in $(A, \cdot_w)$ bezeichnet. Die Rückrichtung ist dann trivial. □

Dieses Lemma besagt, daß assoziative Algebren und Lie-Algebren die *einzigen* Algebren sind, die eine natürliche Darstellungstheorie besitzen.

1.1.8 Definition (Darstellungsalgebra)
Ist A eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra oder eine $\mathbb{K}$-Lie-Algebra, so nennen wir A eine $\mathbb{K}$-*Darstellungsalgebra*.

Darstellungsalgebren geben Anlaß zu *Darstellungen*[3]:

1.1.9 Definition (Darstellung, Modul, Teilmodul)
Sei $(A, \cdot)$ eine $\mathbb{K}$-Darstellungsalgebra bezüglich w und sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\Delta : A \to End_{\mathbb{K}}(V)$ heißt eine $\mathbb{K}$-*Darstellung* von A über V, wenn gilt:

$$\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \circ_w \Delta(b), \text{ für alle } a, b \in A. \tag{1.1}$$

V nennt man den zur Darstellung Δ gehörige A-*Modul*. Läßt sich Δ auf einen $\mathbb{K}$-Unterraum U einschränken, so heißt U ein A-*Teilmodul* von V, i.Z. $U \leq_A V$.

1.1.10 Bemerkung
Da wir bei Darstellungsalgebren $w = x \cdot y$ oder $w = x \cdot y - y \cdot x$ voraussetzen, ist wegen Lemma 1.1.7 $End_{\mathbb{K}}(V)$ ebenfalls eine $\mathbb{K}$-Algebra bezüglich w. Die Bedingung (1.1) ist nichts anderes, als die *Homomorphie-Bedingung* bezüglich w.

1.1.11 Definition (regulär, einfach, halbeinfach)
Sei A eine $\mathbb{K}$-Darstellungsalgebra und V ein A-Modul.

[3] Daher auch der Name *Darstellungs*algebra.

- Die Linksmultiplikation $L : A \to End_{\mathbb{K}}(A);\ a \mapsto L(a)$ heißt die *(links-) reguläre Darstellung* und A der *(links-)reguläre A-Modul.*
- Besitzt V keinen nicht trivialen A-Teilmodul, so heißt V *einfach.* Die zugehörige Darstellung nennt man *irreduzibel.*
- Ist V direkte Summe von einfachen Teilmoduln, so heißt V *halbeinfach.* Die zugehörige Darstellung nennt man *vollreduzibel.*

1.1.12 Definition (adjungierte Darstellung, Killing Form)
Speziell heißt die reguläre Darstellung L einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ die *adjungierte Darstellung* und wird mit $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to End_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ bezeichnet. Die durch

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) := Spur(\mathrm{ad}X \circ \mathrm{ad}Y)$$

definierte Bilinearform auf $\mathfrak{g}$ heißt die *Killing-Form.*

1.1.13 Korollar
Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gilt[4]*:*

$$\mathrm{ad}[X, Y] = [\mathrm{ad}X, \mathrm{ad}Y],$$

wobei die ersten Klammern für die Multiplikation in $\mathfrak{g}$ und die zweiten für den Kommutator in $End_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ stehen.

1.1.14 Korollar
Die Killing-Form ist assoziativ[5]*, d.h.* $\kappa_{\mathfrak{g}}([X, Y], Z) = \kappa_{\mathfrak{g}}(X, [Y, Z]) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

1.2 Elementare Strukturtheorie

Die Beweise der meisten Sätzen in diesem Abschnitt findet man in [HiNe]. Im weiteren sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{K}$.

1.2.1 Definition (Teilalgebra, Ideal)
Ein $\mathbb{K}$-Unterraum $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ heißt *Teilalgebra* von $\mathfrak{g}$, i.Z. $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$, wenn $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Gilt sogar $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$, so nennt man $\mathfrak{h}$ ein *Ideal*, i.Z. $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

1.2.2 Bemerkung
Die Ideale sind also genau die $\mathfrak{g}$-Teilmoduln des regulären Moduls $\mathfrak{g}$.

1.2.3 Definition (abelsch, einfach, halbeinfach, reduktiv)
- $\mathfrak{g}$ heißt *abelsch*, wenn $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

[4] Das ist die zweite Interpretation der Jacobi-Identität.
[5] In [OnVi] wird „invariant“ anstelle von „assoziativ“ benutzt.

- $\mathfrak{g}$ heißt *einfach*, wenn $\mathfrak{g}$ nicht abelsch ist und keine nicht trivialen Ideale besitzt.

- $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\mathfrak{g}$ direkte Summe von einfachen Idealen ist.

- $\mathfrak{g}$ heißt *reduktiv*, wenn $\mathfrak{g}$ direkte Summe einer halbeinfachen und einer abelschen Lie-Algebra ist.

1.2.4 Beispiel

1. Jede 1-dimensionale Lie-Algebra ist abelsch.

2. $\mathfrak{sl}_n := \{X \in \mathbb{K}^{n\times n} |\ Spur X = 0\}$ $(n \geq 2)$ ist mit dem Kommutator als Lie-Produkt eine einfache Lie-Algebra.

3. $\mathfrak{so}_4 := \{X \in \mathbb{K}^{4\times 4} |\ X^T + X = 0\} \cong \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ ist eine halbeinfache Lie-Algebra.

4. $\mathfrak{gl}_n := \mathbb{K}^{n\times n} \cong \mathfrak{sl}_n \oplus \mathbb{K}$ ist eine reduktive Lie-Algebra.

1.2.5 Definition (Kommutatorreihe, absteigende Zentralreihe)

- Die durch $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(i+1)} := [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$ definierte Reihe heißt die *Kommutatorreihe* von $\mathfrak{g}$.

- Die durch $\mathfrak{g}^1 := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{i+1} := [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}]$ definierte Reihe heißt die *absteigende Zentralreihe* von $\mathfrak{g}$.

1.2.6 Definition (auflösbar, nilpotent)

- $\mathfrak{g}$ heißt *auflösbar*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, mit $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$. Ist n minimal mit dieser Eigenschaft, so heißt $\mathfrak{g}$ auflösbar der *Stufe* n.

- $\mathfrak{g}$ heißt *nilpotent*, wenn ein $c \in \mathbb{N}$ existiert, mit $\mathfrak{g}^{c+1} = 0$. Ist c minimal mit dieser Eigenschaft, so heißt c die *Nilpotenzklasse* von $\mathfrak{g}$.

1.2.7 Bemerkung

Jede nilpotente Lie-Algebra ist auflösbar. Die Umkehrung ist *falsch*.

1.2.8 Definition (auflösbares Radikal, Nilradikal, nilpotentes Radikal)

- $\mathrm{rad}\mathfrak{g} := \sum\{\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathfrak{g} |\ \mathfrak{i}$ auflösbar$\}$ ist das größte auflösbare Ideal in $\mathfrak{g}$ und heißt das *auflösbare Radikal* von $\mathfrak{g}$.

- $\mathrm{nil}\mathfrak{g} := \sum\{\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathfrak{g} |\ \mathfrak{i}$ nilpotent$\}$ ist das größte nilpotente Ideal in $\mathfrak{g}$ und heißt das *Nilradikal* von $\mathfrak{g}$.

- $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g} := \bigcap\{\mathrm{Kern}\Delta |\ \Delta$ halbeinfach$\}$ ist Durchschnitt aller Kerne halbeinfacher Darstellungen und heißt das *nilpotente Radikal* von $\mathfrak{g}$.

1.2.9 Lemma

1. $\mathrm{rad}\mathfrak{g} = \bigcap\{\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathfrak{g} | \ \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *halbeinfach*$\}$ *ist das kleinste Ideal mit der Eigenschaft, daß* $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}\mathfrak{g}$ *halbeinfach ist.*

2. $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g} = \bigcap\{\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathfrak{g} | \ \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *reduktiv*$\}$ *ist das kleinste Ideal mit der Eigenschaft, daß* $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$ *reduktiv ist.*

3. *Für jeden Lie-Homomorphismus* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *gilt:*

$$\phi(\mathrm{rad}\mathfrak{g}) = \mathrm{rad}\phi(\mathfrak{g}), \ \phi(\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}) = \mathrm{rad}_n\phi(\mathfrak{g}).$$

4. *Eigenschaft 3 gilt i.a.* nicht *für Nilradikale.*

Anhand des folgenden Verbands 1.1 (Seite 15) lassen sich viele fundamentale Sätze über die Struktur von Lie-Algebren ablesen, insbesondere der Satz von Levi und die Cartanschen Kriterien für Auflösbarkeit und Halbeinfachheit.

1.2.10 Satz (Satz von Levi)

Jede $\mathbb{K}$*-Lie-Algebra ist* semidirektes Produkt *ihres auflösbaren Radikals und einer* halbeinfachen *Unteralgebra* $\mathfrak{s}$*, d.h.* $\mathrm{rad}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{s} = 0$ *und* $\langle \mathrm{rad}\mathfrak{g}, \mathfrak{s}\rangle = \mathfrak{g}$*, i.Z.:*

$$\mathfrak{g} = \mathrm{rad}\mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{s}.$$

Eine solche Unteralgebra nennt man eine Levi-Unteralgebra.

1.2.11 Satz

Folgende Kriterien sind ablesbar[6]*:*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} \text{ ist auflösbar} &\iff \mathfrak{g} = \mathrm{rad}\mathfrak{g} \\
&\iff \mathfrak{g} \perp_\kappa [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\
&\iff [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \text{ ist nilpotent} \\
&\iff [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathrm{rad}_n\mathfrak{g}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} \text{ ist halbeinfach} &\iff \kappa_{\mathfrak{g}} \text{ ist nicht ausgeartet} \\
&\iff \mathrm{rad}\mathfrak{g} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} \text{ ist reduktiv} &\iff \mathrm{rad}_n\mathfrak{g} = 0 \\
&\iff \mathfrak{g} = \mathrm{rad}\mathfrak{g} \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\
&\iff \mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\
&\iff [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \text{ ist halbeinfach}
\end{aligned}$$

Mit $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *bezeichnen wir das Zentrum von* $\mathfrak{g}$.

---

[6]Die ersten Äquivalenzen sind jeweils die bekannten Cartanschen Kriterien für Auflösbarkeit und Halbeinfachheit von Lie-Algebren.

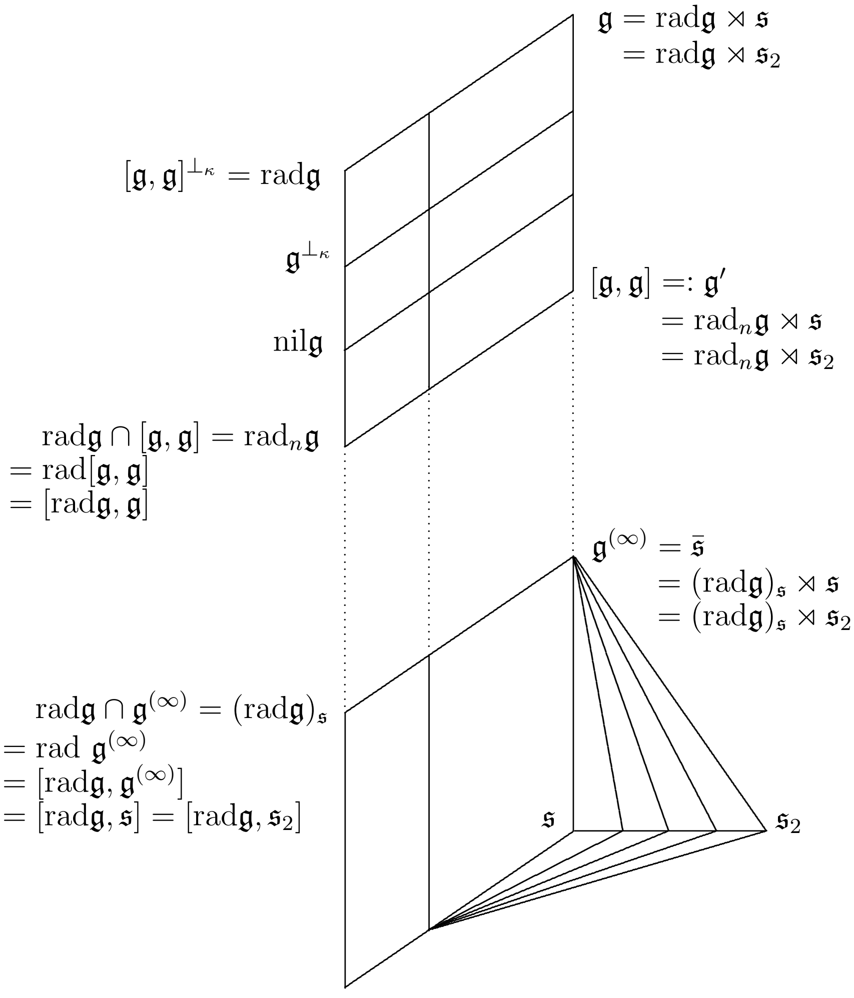

Abbildung 1.1: Struktur einer Lie-Algebra

1.3 Elementare Darstellungstheorie

1.3.1 Universelle Einhüllalgebra

Abschnitt 1.1 zeigte, daß durch Einführung des Kommutators als Produkt aus einer assoziativen Algebra eine Lie-Algebra entsteht[7]. Es gilt sogar die Umkehrung: Jede Lie-Algebra läßt sich in eine assoziative Algebra einbetten, die sog. *universelle Einhüllalgebra*.

1.3.1 Definition (symmetrische Algebra, universelle Einhüllalgebra)
Sei $\mathcal{T}(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes^n \mathfrak{g}$ die *Tensoralgebra* von $\mathfrak{g}$.

- Die durch
$$\mathcal{S}(\mathfrak{g}) := \mathcal{T}(\mathfrak{g})/(X \otimes Y - Y \otimes X|\ X, Y \in \mathfrak{g})$$
definierte assoziative kommutative Algebra heißt die *symmetrische Algebra* von $\mathfrak{g}$.[8]

- Die durch
$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := \mathcal{T}(\mathfrak{g})/(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]|\ X, Y \in \mathfrak{g})$$
definierte assoziative Algebra heißt die *universelle Einhüllalgebra* von $\mathfrak{g}$.

1.3.2 Definition (Symmetrisierung)
Die aus der linearen Algebra bekannte Symmetrisierung $\sigma : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ läßt sich (per Definition) über $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ faktorisieren. Komponiert man die entstehende Restklassenabbildung mit dem natürlichen Epimorphismus von $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ auf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, so bezeichnet man die gewonnene Abbildung ebenfalls mit σ.

Eine elegante Folgerung aus dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt, kurz PBW-Satz, ist der folgende Satz (vgl. [Dix]):

1.3.3 Satz
Die Symmetrisierung $\sigma : \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ist ein $\mathfrak{g}$-Modulisomorphismus. Insbesondere ist die natürliche Abbildung $\iota : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ eine Einbettung.

1.3.4 Bemerkung
Die letzte Aussage des Satzes 1.3.3 ist folgendermaßen zu interpretieren: Identifiziert man die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit ihrem Bild in der (freien) assoziativen Tensoralgebra $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$, so hat sie mit dem Ideal $(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]|\ X, Y \in \mathfrak{g})$ einen trivialen Schnitt.

Die universelle Einhüllalgebra ist durch folgende Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt:

[7] Dadurch zeichneten sich sogar die Lie-Algebren aus (vgl. 1.1.7).

[8] Hierbei ist $\mathfrak{g}$ als ein Vektorraum zu betrachten. Die Lie-Struktur spielt hier keine Rolle.

1.3.5 Satz (universelle Eigenschaft)
Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und A eine beliebige assoziative *Algebra. Jeder Lie-Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to A$ läßt sich zu einem eindeutigen Algebrenhomomorphismus $\tilde{\rho} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to A$ fortsetzen.*

1.3.2 Nilpotente Lie-Algebren

Die Darstellungstheorie von nilpotenten Lie-Algebren spielt für das Verständnis der Darstellungstheorie von beliebigen Lie-Algebren eine besondere Rolle.

1.3.6 Lemma
Sei X ein nilpotenter Endomorphismus von V. Dann existiert ein $v \in V$, $v \neq 0$ mit $Xv = 0$.

Beweis. Per Definition existiert ein minimales n mit $X^n = 0$. Es existiert somit ein $u \in V$ mit $v := X^{n-1}u \neq 0$. $Xv = X(X^{n-1}u) = X^n u = 0$. □

Dieses Lemma ist nun ein Spezialfall von folgendem Satz für $\dim \mathfrak{h} = 1$.

1.3.7 Satz
Sei $\mathfrak{h} < \mathfrak{gl}(V)$ eine Lie-Teilalgebra von nilpotenten Endomorphismen. Dann existiert ein $v \in V$, $v \neq 0$ mit $Xv = 0$ für alle $X \in \mathfrak{gl}(V)$.

Per Induktion nach $\dim V$ beweist man:

1.3.8 Korollar
Sei $\mathfrak{h} < \mathfrak{gl}(V)$ eine Lie-Teilalgebra von nilpotenten Endomorphismen. Dann ist $\mathfrak{h}$ strikt triangulierbar. $\mathfrak{h}$ ist insbesondere eine nilpotente Lie-Algebra.

Als *Nilpotenzkriterium* erhält man sofort:

1.3.9 Korollar (Satz von Engel)
Sei $\mathfrak{h}$ eine Lie-Algebra. Dann gilt:
$\mathfrak{h}$ ist nilpotent $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{ad}X$ nilpotent für alle $X \in \mathfrak{h}$.

Ein anderer Satz aus der linearen Algebra findet in diesem Kontext eine Verallgemeinerung. Im weiteren sei $\mathbb{K}$ stets *algebraisch abgeschlossen*, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.3.10 Satz (Hauptraumzerlegung)
Sei X ein Endomorphismus von V. Dann gestattet V die Hauptraumzerlegung

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} V^{\lambda_i} \quad (s \leq \dim V),$$

wobei λ_i die verschiedenen Eigenwerte und

$$V^{\lambda_i} = V_X^{\lambda_i} := \{v \in V |\ \exists n \in \mathbb{N} :\ (X - \lambda_i \mathrm{id})^n v = 0\}$$

*der λ_i-*Hauptraum *von X sind.*

Die Eigenwert-, Eigenraum- und Hauptraum-Begriffe lassen sich auf *nilpotente* Lie-Algebren übertragen.

1.3.11 Definition (Gewicht, Gewichtsraum, Wurzelraum)
Sei $\mathfrak{h}$ eine nilpotente Lie-Algebra und V ein $\mathfrak{h}$-Modul. Eine 1-dimensionale Darstellung $\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbb{K} \cong \mathfrak{gl}_1(\mathbb{K})$ heißt *Gewicht*, falls der *Gewichtsraum*

$$V_\lambda(\mathfrak{h}) := \{v \in V | \; \forall X \in \mathfrak{h} : \; Xv = \lambda(X)v\} \neq 0$$

ist. $V_\lambda(\mathfrak{h})$ ist enthalten in dem *Wurzelraum*[9]

$$V^\lambda(\mathfrak{h}) := \{v \in V | \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall X \in \mathfrak{h} : \; (X - \lambda(X)\mathrm{id})^n v = 0\}.$$

Die Menge aller Gewichte von V bezeichnet man mit $\Phi_V(\mathfrak{h})$.

1.3.12 Bemerkung
Sei $\mathfrak{h}$ eine Lie-Algebra. Für ein Funktional $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ gilt:

$$\lambda \text{ ist eine 1-dimensionale Darstellung} \iff \mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \leq \mathrm{Kern}\lambda.$$

Insbesondere ist

$$\{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \; \lambda \text{ ist eine 1-dimensionale Darstellung}\} \equiv \mathfrak{h}/\mathfrak{h}'$$

eine natürliche Identifikation.

Dies ist nun die angekündigte Verallgemeinerung von Satz 1.3.10, die auf Zassenhaus zurückgeht.

1.3.13 Satz (Wurzelraumzerlegung)
Sei $\mathfrak{h}$ eine nilpotente Lie-Algebra und V ein $\mathfrak{h}$-Modul. Dann gestattet V die Wurzelraumzerlegung

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} V^{\lambda_i}(\mathfrak{h}) \quad (s \leq \dim V),$$

wobei $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ die verschiedenen Gewichte und V^{λ_i} der λ_i-Wurzelraum von $\mathfrak{h}$ sind.[10]

1.3.14 Definition (Wurzel, Wurzelsystem)
Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, und $\mathfrak{h}$ eine nilpotente Lie-Teilalgebra. $\mathfrak{g}$ ist vermöge der adjungierten Darstellung ein $\mathfrak{h}$-Modul. Ein *nicht triviales* Gewicht nennt man *Wurzel* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Die Menge der Wurzeln $\Delta_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) := \Phi_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) \setminus \{0\}$ nennt man *Wurzelsystem*. $\mathfrak{g}$ gestattet die *Wurzelraumzerlegung*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})} \mathfrak{g}^\alpha. \tag{1.2}$$

Offenbar gilt $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}^0$.

[9] In [OnVi] wird die Terminologie „root space“ benutzt.

[10] Im Lichte des Korollars 1.3.8 ist dieser Satz ebenfalls eine wesentliche Verallgemeinerung von Satz 1.3.7.

Folgender Sachverhalt verdient den Namen „Hauptlemma der Darstellungstheorie von Lie-Algebren“.

1.3.15 Lemma (Hauptlemma)
Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine nilpotente Lie-Teilalgebra und V ein $\mathfrak{g}$-Modul[11]*. Für $\alpha \in \Phi_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ und $\lambda \in \Phi_V(\mathfrak{h})$ gilt:*

$$\mathfrak{g}^\alpha V^\lambda \subseteq V^{\alpha+\lambda}.$$

Insbesondere für $\alpha, \beta \in \Phi_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ gilt:

$$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subseteq \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}.$$

Ist $\alpha \notin \Phi_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ (bzw. $\lambda \notin \Phi_V(\mathfrak{h})$), so ist $\mathfrak{g}^\alpha = 0$ (bzw. $V^\lambda = 0$) zu setzen.

1.3.16 Bemerkung

- $\mathfrak{g}^0$ ist eine Lie-Teilalgebra und V^λ ist $\mathfrak{g}^0$-invariant.
- Lemma 1.3.15 besagt, daß $\mathfrak{g}$ eine $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}'$*-graduierte Lie-Algebra* ist, und daß jeder $\mathfrak{g}$-Modul ein $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}'$*-graduierter Modul* ist.
- Die letzte Aussage läßt sich in 2.1.3 für *halbeinfache* Lie-Algebren erheblich verbessern.

1.3.17 Korollar
Sei $\alpha, \beta \in \Phi_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ und $\alpha + \beta \neq 0$. Dann ist $\mathfrak{g}^\alpha \perp_{\kappa_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g}^\beta$.

1.3.3 Cartansche Teilalgebren

Im weiteren sei $\mathbb{K}$ wieder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

1.3.18 Definition (Cartansche Teilalgebra)
Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $\mathfrak{h}$ eine nilpotente Lie-Teilalgebra. $\mathfrak{h}$ heißt *Cartansche Teilalgebra*, falls $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ ist.[12]

Die Wurzelraumzerlegung (1.2) nimmt folgende Form an:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})} \mathfrak{g}^\alpha. \tag{1.3}$$

1.3.19 Lemma
Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra.

1. *Eine nilpotente Lie-Teilalgebra $\mathfrak{h}$ ist genau dann Cartansche Teilalgebra, wenn sie selbstnormalisierend ist, d.h. wenn $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ gilt.*

[11] Insbesondere auch ein $\mathfrak{h}$-Modul.
[12] Vgl. Definition 1.3.14.

2. *Jede Cartansche Teilalgebra ist maximal nilpotent. Die Umkehrung ist falsch.*

Die Existenz von Cartanschen Teilalgebren wird mit Hilfe von regulären Elementen gesichert.

1.3.20 Definition (reguläres Element, Rang)

- Der *Rang* $\mathrm{Rg}X$ *eines Elementes* $X \in \mathfrak{g}$ ist die Dimension des Nullhauptraumes $\mathfrak{g}_X^0$ von X bezüglich ad.
- Ein Element $X \in \mathfrak{g}$ heißt *reguläres Element*, falls $\mathrm{Rg}X$ minimal ist.
- Der *Rang* $\mathrm{Rg}\mathfrak{g}$ *einer Lie-Algebra* ist der Rang eines regulären Elementes.

1.3.21 Satz
Ist X ein reguläres Element von $\mathfrak{g}$, dann ist $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}_X^0$ eine Cartansche Teilalgebra von $\mathfrak{g}$. $\dim \mathfrak{h} = \mathrm{Rg}\mathfrak{g}$.

1.3.22 Korollar
In jeder Lie-Algebra existieren Cartansche Teilalgebren.

1.3.23 Satz
In einer komplexen *Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind alle Cartanschen Teilalgebren konjugiert.*

1.3.24 Lemma
Ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ direktes Produkt von Idealen, dann sind die Cartanschen Teilalgebren genau die von der Form $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2$, wobei $\mathfrak{h}_i$ die Cartanschen Teilalgebren von $\mathfrak{g}_i$ sind $(i = 1, 2)$.

1.4 Abstrakte Wurzelsysteme

Sowohl in diesem als auch in den nächsten Abschnitten folge ich der Darstellung in [OnVi]. Abstrakte Wurzelsysteme sind starre geometrische Objekte, die bei der Klassifikation von halbeinfachen Lie-Algebren eine besondere Rolle gespielt haben.

1.4.1 Definition (Abstraktes Wurzelsystem)
Sei E ein endlich-dimensionaler Euklidischer Vektorraum und $(\cdot, \cdot)$ das dazugehörige Skalarprodukt. Für alle $0 \neq \alpha \in E$ definiere die Spiegelung r_α mit

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta | \alpha \rangle \alpha \quad (\beta \in E),$$

wobei[13]

$$\langle \beta | \alpha \rangle := 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

[13] Diese nützliche Definition von $\langle \cdot | \cdot \rangle$ findet man in [OnVi], Seite 68. Man beachte, daß in [Hel] $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das gewöhnliche Skalarprodukt steht.

Eine Teilmenge $\Delta \subset E$ heißt *(abstraktes) Wurzelsystem*[14] von E, wenn gilt:

1. Δ ist endliche Teilmenge[15] von E und $0 \notin \Delta$;

2. $r_\alpha(\Delta) = \Delta$ für alle $\alpha \in \Delta$;

3. $\langle\alpha|\beta\rangle \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha, \beta \in \Delta$.

Aus 2 folgt: $\alpha \in \Delta \;\Rightarrow\; -\alpha \in \Delta$. Aus 3 folgt:

$$\alpha \in \Delta \text{ und } c\alpha \in \Delta \ (c \in \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; c \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}.$$

Ein Wurzelsystem nennt man *reduziert*, wenn gilt:

4. $\alpha \in \Delta$ und $c\alpha \in \Delta$ $(c \in \mathbb{R}) \Rightarrow\; c = \pm 1$.

Sind $\Delta_1 \subset E_1$ und $\Delta_2 \subset E_2$ zwei Wurzelsysteme. Dann ist $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \subset E_1 \oplus E_2$ ebenfalls ein Wurzelsystem. Δ heißt die *direkte Summe* von Δ_1 und Δ_2. Ein Wurzelsystem Δ heißt *unzerlegbar*, falls es sich nicht als direkte Summe von zwei Wurzelsystemen darstellen läßt. Wir definieren den *Rang* des Wurzelsystems $\mathrm{Rg}\Delta := \dim\langle\Delta\rangle \leq \dim E$.

Die 3. Bedingung impliziert starke Einschränkungen für den Winkel θ zwischen $\alpha, \beta \in \Delta$:

1.4.2 Lemma
Seien $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ zwei Elemente des Euklidischen Vektorraumes E, wobei $\langle\alpha|\beta\rangle$ und $\langle\beta|\alpha\rangle$ nicht positive ganze Zahlen sind. Sei o.B.d.A. $|\beta| \geq |\alpha|$, dann sind nur folgende Werte für θ, $\langle\alpha|\beta\rangle$, $\langle\beta|\alpha\rangle$ und $|\beta|^2/|\alpha|^2$ möglich:

$\langle\alpha\|\beta\rangle\langle\beta\|\alpha\rangle$	θ	$\langle\alpha\|\beta\rangle$	$\langle\beta\|\alpha\rangle$	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	$\pi/2$	0	0	
1	$2\pi/3$	-1	-1	1
2	$3\pi/4$	-1	-2	2
3	$4\pi/5$	-1	-3	3
4	π	-2	-2	1
4	π	-1	-4	4

Beweis. Aus $\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle = 4\cos^2\theta$ und $|\beta|^2/|\alpha|^2 = \langle\beta|\alpha\rangle/\langle\alpha|\beta\rangle$ folgt die Behauptung. □

[14] Die Elemente von Δ nennt man Wurzeln.

[15] Wir verlangen weder, daß $\Delta \neq \emptyset$, noch daß Δ ein Erzeugendensystem von E ist. Das hat den Vorteil, daß wir die Wurzelsysteme reduktiver Lie-Algebren als abstrakte Wurzelsysteme betrachten können (vgl. Bemerkung 1.6.4).

1.4.3 Definition (α-String durch β)
Seien $\alpha, \beta \in \Delta$ zwei nicht proportionale Wurzeln. Die Menge

$$\{\gamma \in \Delta |\ \gamma = \beta + k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

nennt man den *α-String durch β*.

1.4.4 Lemma
Der α-String durch β ist von der Form

$$\{\beta + k\alpha |\ -p \leq k \leq q\}, \quad p, q \geq 0.$$

Es gilt[16]*:*

$$p - q = \langle \beta | \alpha \rangle.$$

Ist $\langle \beta | \alpha \rangle < 0$[17]*, dann ist $\beta + \alpha \in \Delta$. Ist $\beta - \alpha \notin \Delta$, so gilt auch die Umkehrung.*

Vermöge $(\cdot, \cdot)$ identifizieren wir E mit seinem Dualraum E^*:

$$E \to E^*;\ \lambda \mapsto u_\lambda := (\cdot, \lambda).$$

Dieser Isomorphismus induziert ein Skalarprodukt auf E^*: $(u_\lambda, u_\mu) := (\lambda, \mu)$. Für $\alpha \in \Delta$ definieren wir

$$\alpha^\vee := \langle \cdot | \alpha \rangle = 2 \frac{u_\alpha}{(\alpha, \alpha)}. \tag{1.4}$$

Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \Delta$: $\langle \alpha^\vee | \beta^\vee \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle$.

1.4.5 Definition (Duales Wurzelsystem)
$\Delta^\vee := \{\alpha^\vee | \alpha \in \Delta\} \subset E^*$ nennt man das zu $\Delta \subset E$ *duale* Wurzelsystem in E^*.

1.4.6 Bemerkung
- $\mathrm{Rg}\Delta^\vee = \mathrm{Rg}\Delta$;
- $\Delta^\vee$ ist genau dann reduziert, wenn Δ reduziert ist;
- $\Delta^\vee$ ist genau dann unzerlegbar, wenn Δ unzerlegbar ist.

1.4.1 Fundamentalsysteme

Ab jetzt sind alle Wurzelsysteme reduziert. In diesem Unterabschnitt folge ich der Darstellung in [Crt].

1.4.7 Definition (Positives System, Fundamentalsystem)
- Eine Teilmenge $\Delta^+ \subset \Delta$ heißt *positives System von Wurzeln*, falls $E^+ \subset E$ existiert mit $\Delta^+ = \Delta \cap E^+$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

[16] In [Hel] ist $p \leq 0$. Also ist $p \leq k \leq q$ und $p + q = -\langle \beta | \alpha \rangle$.
[17] Das ist äquivalent zu $(\alpha, \beta) < 0$, bzw. $\pi/2 < \theta \leq \pi$.

a) $\gamma \in E^+,\ c > 0 \Rightarrow c\gamma \in E^+$;
b) $\gamma_1, \gamma_2 \in E^+ \Rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 \in E^+$;
c) für jedes $\gamma \in E$ ist genau eine der folgenden Aussagen wahr: $\gamma \in E^+,\ -\gamma \in E^+$ oder $\gamma = 0$.

- Eine Teilmenge $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \Delta$ heißt *Fundamentalsystem* oder System von *einfachen Wurzeln*, falls gilt:

  1. Π ist linear unabhängig;
  2. $\forall \gamma \in \Delta\ \exists c_i \in \mathbb{R}:\ \gamma = \pm \sum_{i=1}^{l} c_i\alpha_i, \quad c_i \geq 0\ \forall i = 1, \ldots, l.$

1.4.8 Bemerkung

- Die oben erwähnte Teilmenge E^+ existiert. Dafür wähle man eine Basis $(\gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ von E und definiere

$$E^+ := \{\sum_{i=1}^{l} c_i\gamma_i |\ \exists i:\ c_i \neq 0\ ,\ i_0 \text{ minimal mit } c_{i_0} \neq 0 \Rightarrow c_i > 0\}.$$

- Ein Fundamentalsystem ist insbesondere eine Basis von E.

- Weder Δ^+ noch Π sind Wurzelsysteme.

1.4.9 Satz

- *Jedes Fundamentalsystem liegt in genau einem positiven System.*

- *Jedes positive System enthält genau ein Fundamentalsystem.*

1.4.10 Bemerkung
Dieser Satz besagt, daß die Fundamentalsysteme in Bijektion zu den positiven Systemen stehen.

1.4.11 Lemma
Sei Π *Fundamentalsystem,* $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi$. *Dann gilt für* $\alpha_i \neq \alpha_j$: $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$.

Ab jetzt zeichnen wir ein positives System Δ^+ und somit ein Fundamentalsystem Π aus. Daß dies keine besondere Einschränkung darstellt, werden wir in Korollar 1.4.19 erkennen.

1.4.2 Cartan-Matrizen und Dynkin-Diagramme

1.4.12 Definition (Cartan-Matrix)
Seien Δ ein Wurzelsystem und $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \Delta$ ein Fundamentalsystem. Die durch

$$a_{i,j} = \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = 2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \quad i, j \in \{1, \ldots, l\}$$

definierte Matrix $A = (a_{i,j})$ nennt man die *Cartan-Matrix* von Δ.

1.4.13 Bemerkung

- Die Koeffizienten von A sind ganze Zahlen mit

  1. $a_{i,i} = 2$ für alle $i = 1, \dots, l$;
  2. $a_{i,j} \leq 0$ für alle $i \neq j$;
  3. $a_{i,j} = 0 \Longleftrightarrow a_{j,i} = 0$ für alle $i \neq j$.

- Für ein anderes Fundamentalsystem erhält man bis auf Permutation der Indizes dieselbe Cartan-Matrix.

1.4.14 Definition (Dynkin-Diagramm)
Seien Δ ein Wurzelsystem und $\Pi \subset \Delta$ ein Fundamentalsystem. Das *Dynkin-Diagramm* ist ein Graph, dessen Eckenmenge Π ist. Zwei verschiedene Ecken $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi$ sind durch $m_{i,j} := \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle \langle \alpha_j | \alpha_i \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$ Kanten verbunden. Ist α_j länger als α_i, so gibt man den Kanten eine Richtung α_j nach α_i. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a_{j,i}/a_{i,j} > 1$ ist.

1.4.15 Bemerkung

- Der Isomorphie-Typ des Dynkin-Diagramms ist unabhängig von der Wahl des Fundamentalsystems.

- Das Dynkin-Diagramm ist durch die Cartan-Matrix eindeutig festgelegt. Umgekehrt läßt sich die Cartan-Matrix aus dem Dynkin Diagramm rekonstruieren.

- Das Wurzelsystem ist genau dann zerlegbar, wenn die Cartan-Matrix durch Permutation der Indizes zerlegbar ist, bzw. wenn das Dynkin Diagramm unzusammenhängend ist.

1.4.16 Satz
Die Dynkin-Diagramme der Fundamentalsysteme sind in Abbildung 1.2 (Seite 25) aufgelistet. Dabei sind die Zahlen n_i $(i = 1, \dots, l)$ an den Ecken eines jeden Diagramms die Koeffizienten der höchsten Wurzel $\delta = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i$ des dazugehörigen Wurzelsystems.

1.4.3 Weyl-Gruppen

1.4.17 Definition (Weyl-Gruppe)
Sei Δ ein Wurzelsystem. Definiere die *Weyl-Gruppe* W durch

$$W := \langle r_\alpha | \ \alpha \in \Delta \rangle < O(E).$$

1.4.18 Satz

- $W = \langle r_\alpha | \ \alpha \in \Pi \rangle$.

- *Sei* $w \in W$. $w\Pi = \Pi \Rightarrow w = 1_W$.

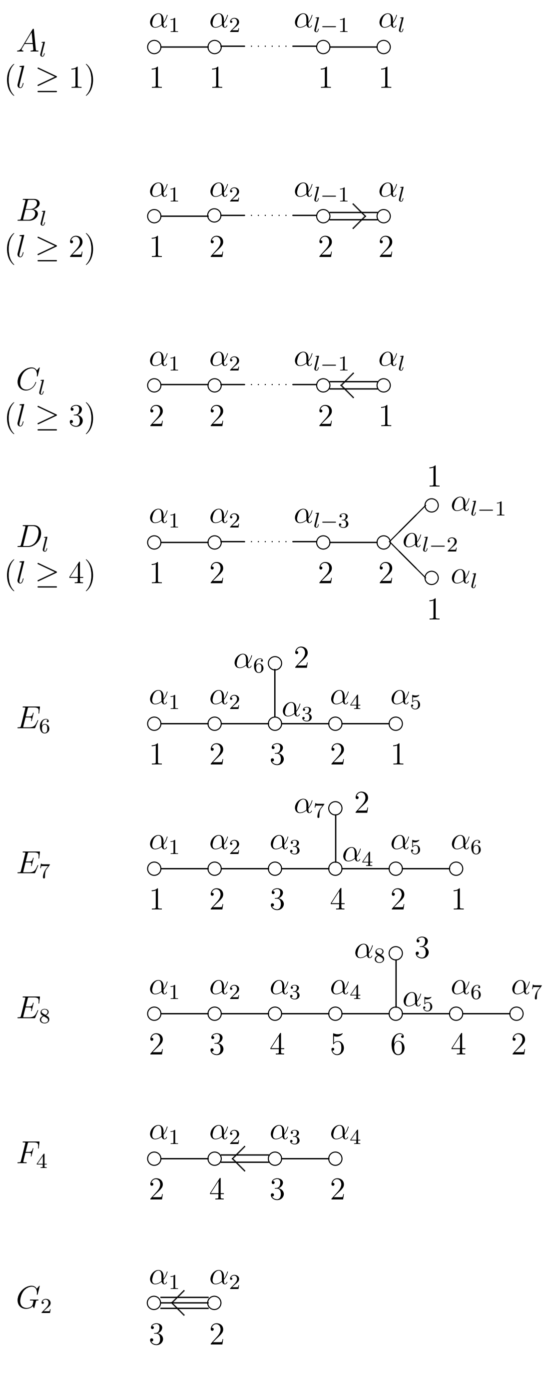

Abbildung 1.2: Dynkin-Diagramme

- *Wenn* Π *ein Fundamentalsystem ist, so ist auch* $w\Pi$ *ein Fundamentalsystem für alle* $w \in W$*.*
- *Seien* Π, Π' *Fundamentalsysteme. Dann existiert genau ein* $w \in W$ *mit* $w\Pi = \Pi'$*.*

1.4.19 Korollar

- *Die Weyl-Gruppe operiert regulär auf der Menge der Fundamentalsysteme, insbesondere sind alle Fundamentalsysteme bzw. alle positiven Systeme gleichberechtigt.*
- *Es gilt:* $\mathrm{Aut}\Delta = W \rtimes \mathrm{Aut}\Pi$. $\mathrm{Aut}\Pi$ *ist zur Automorphismengruppe des Dynkin-Diagramms*[18] *in natürlicher Weise isomorph.*

1.5 Halbeinfache Lie-Algebren

Dies ist eins der beliebtesten Themen in der Literatur. In diesem Abschnitt ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\mathfrak{g}$ eine *halbeinfache* Lie-Algebra.

1.5.1 Satz
Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $\mathfrak{g}$ *ist halbeinfach.*
2. *Jede Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *ist vollreduzibel, bzw. jeder* $\mathfrak{g}$*-Modul ist halbeinfach.*

1.5.2 Lemma
Sei $\mathfrak{h}$ *eine Cartansche Teilalgebra einer* halbeinfachen *Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$*. Für jedes* $\alpha \in \Delta_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ *ist* $-\alpha \in \Delta_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$*. Die Killing-Form* $\kappa_\mathfrak{g}$ *ist* nicht ausgeartet *auf* $\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$ *für alle* $\alpha \in \Delta_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$*.*

1.5.3 Satz
Sei $\mathfrak{h}$ *eine Cartansche Teilalgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra über* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*. Dann ist* $\mathfrak{h}$ *eine maximal kommutative Teilalgebra von* $\mathfrak{g}$*, die aus* ad*-halbeinfachen Elementen besteht und mit ihrem Normalisator übereinstimmt. Umgekehrt ist jede solche Teilalgebra eine Cartansche Teilalgebra.*

1.5.4 Korollar
Sei $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache Lie-Algebra,* $\mathfrak{h}$ *eine Cartansche Teilalgebra von* $\mathfrak{g}$ *und* V *ein* $\mathfrak{g}$*-Modul. Dann operiert jedes Element* $X \in \mathfrak{h}$ *halbeinfach. Ist* $\lambda \in \Phi_V(\mathfrak{h})$*, dann stimmt der Wurzelraum* V^λ *mit dem Gewichtsraum* V_λ *überein. Insbesondere ist* $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ *für alle* $\alpha \in \Phi_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$*. Für alle* $\alpha \in \Delta_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ *ist* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$*. Ebenfalls ist* $\mathfrak{h}_\alpha := [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ *1-dimensional. Sind* $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$*, dann ist* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$*.*

[18] Die Automorphismengruppen der Dynkin-Diagramme sind in Lemma 3.3.16 aufgelistet.

1.5.5 Korollar
Die Wurzelraumzerlegung (1.3) einer halbeinfachen Lie-Algebra ist eine Gewichtsraumzerlegung. *Genauer gilt:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta^+_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

wobei $+$ *und* $\sum$ *für die bezüglich* $\kappa_{\mathfrak{g}}$ *orthogonale Summe stehen.*

1.5.6 Bemerkung
Wegen Korollar 1.5.4 existiert ein $h_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ mit $\alpha(h_\alpha) = 2$. Und wegen Lemma 1.5.2 gibt es für jedes $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ ein $e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$ mit $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$. Insgesamt gilt also:

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha, \ [h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha, \ [h_\alpha, e_{-\alpha}] = -2e_{-\alpha}.$$

Vermöge

$$e_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ e_{-\alpha} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\langle e_\alpha, h_\alpha, e_{-\alpha}\rangle_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

1.5.7 Definition ($\mathfrak{h}(\mathbb{R})^*$)
Für das Wurzelsystem $\Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ bezüglich einer Cartanschen Teilalgebra $\mathfrak{h}$ definieren wir $\mathfrak{h}(\mathbb{R})^* := \langle \Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{R}}$.

Die Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ist für den Beweis des folgenden Satzes sehr nützlich, was aufgrund von Bemerkung 1.5.6 nicht erstaunlich ist.

1.5.8 Satz
Die Killing-Form $\kappa_{\mathfrak{g}}$ *induziert auf* $\mathfrak{h}^*$ *eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform, deren Einschränkung auf* $\mathfrak{h}(\mathbb{R})^*$ *positiv definit ist.* $\mathfrak{h}(\mathbb{R})^*$ *ist somit ein Euklidischer Raum. Das Wurzelsystem* $\Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}(\mathbb{R})^*$ *erfüllt die Axiome eines* abstrakten reduzierten Wurzelsystems. *Die unzerlegbaren Komponenten von* $\Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ *entsprechen den einfachen Idealen von* $\mathfrak{g}$. *Insbesondere ist* $\Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ *genau dann unzerlegbar, wenn* $\mathfrak{g}$ *einfach ist.*

1.5.9 Definition ($\mathfrak{h}(\mathbb{R})$)
Vermöge des natürlichen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{h}$ und seinem Bidualraum $\mathfrak{h}^{**}$ fasse man $\Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})^\vee$ als Teilmenge von $\mathfrak{h}$ auf. Definiere

$$\mathfrak{h}(\mathbb{R}) := \langle \Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})^\vee\rangle_{\mathbb{R}} < \mathfrak{h}^{**} \equiv \mathfrak{h}$$

als reellen Unterraum von $\mathfrak{h}$. $\Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})^\vee \subset \mathfrak{h}(\mathbb{R})$ ist das zu $\Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}(\mathbb{R})^*$ duale Wurzelsystem.

1.5.10 Lemma
Für alle $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ *gilt:* $\alpha^\vee = h_\alpha$ *und* $\kappa_{\mathfrak{g}}(e_\alpha, e_{-\alpha}) = \frac{2}{\kappa_{\mathfrak{g}}(\alpha,\alpha)}$.

Jeder Automorphismus ν des Dynkin-Diagramms einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ induziert einen Automorphismus

$$\bar{\nu} : e_{\alpha_i} \mapsto e_{\nu\alpha_i},\ h_{\alpha_i} \mapsto h_{\nu\alpha_i},\ f_{\alpha_i} \mapsto f_{\nu\alpha_i}$$

von $\mathfrak{g}$. Es gilt sogar:

1.5.11 Lemma
Ist $\mathrm{Int}\mathfrak{g} := \exp(\mathrm{ad}\mathfrak{g})$ *die Gruppe der inneren Automorphismen*[19] *von* $\mathfrak{g}$ *und* $\mathrm{Aut}\Pi$ *die Automorphismengruppe des Dynkin-Diagramms, dann ist*[20]

$$\mathrm{Aut}\mathfrak{g} \cong \mathrm{Int}\mathfrak{g} \rtimes \mathrm{Aut}\Pi.$$

Ist ν *ein Automorphismus des Dynkin-Diagramms und* k *dessen Ordnung, dann ist* $k = 1, 2, 3$.

1.6 Reduktive Lie-Algebren

Die Aussagen des vorigen Abschnittes lassen sich mit geringfügigen Modifikationen auf reduktive Algebren übertragen. Reduktive Lie-Algebren werden uns bei Loop-Algebren begegnen (vgl. Lemma 2.2.2).

1.6.1 Satz
Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $\mathfrak{g}$ *ist reduktiv.*

2. *Die adjungierte Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *ist vollreduzibel, bzw.* $\mathfrak{g}$ *ist als regulärer Modul halbeinfach.*

1.6.2 Bemerkung

- Sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und $\mathfrak{h}$ eine Cartansche Teilalgebra von $\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, wobei $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ die Cartansche Teilalgebra des halbeinfachen Kommutatorideals $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ das Zentrum von $\mathfrak{g}$ sind.

- Hat eine reduktive Lie-Algebra ein nicht triviales Zentrum, so ist nach dem Cartanschen Halbeinfachheitskriterium ihre Killing-Form ausgeartet. Ersetzt man die Killing-Form durch eine nicht ausgeartete, symmetrische, assoziative Bilinearform, dann ist Lemma 1.5.2 gültig für reduktive Algebren.

- Satz 1.5.3 ist dagegen ohne Veränderung zu übernehmen.

[19] $\mathrm{Int}\mathfrak{g} = (\mathrm{Aut}\mathfrak{g})^0$ ist die Zusammenhangskomponente des 1 Elementes von $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$.
[20] Wir identifizieren ν mit dem induzierten äußeren Automorphismus $\bar{\nu}$ von $\mathfrak{g}$.

- Korollar 1.5.4 ist für reduktive Lie-Algebren wahr, wenn man V als halbeinfachen $\mathfrak{g}$-Modul voraussetzt. Bei halbeinfachen Lie-Algebren ist dies wegen Satz 1.5.1 immer der Fall.

- Die restlichen Aussagen des vorigen Abschnittes sind mit den beiden genannten Modifikationen für reduktive Lie-Algebren gültig.

Insbesondere nehmen Lemma 1.5.2 und Korollar 1.5.4 folgende Form an:

1.6.3 Satz
Seien $\mathfrak{g}$ eine komplexe reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{h}$ eine Cartansche Teilalgebra von $\mathfrak{g}$ und $(\cdot,\cdot)$ eine nicht ausgeartete*, symmetrische, assoziative Bilinearform*[21] *auf $\mathfrak{g}$. Für jedes $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ ist $-\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ und $(\cdot,\cdot)$ ist nicht ausgeartet auf $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Ist V ein* halbeinfacher *$\mathfrak{g}$-Modul und $\lambda \in \Phi_V(\mathfrak{h})$, dann stimmt der Wurzelraum V^λ mit dem Gewichtsraum V_λ überein. Insbesondere ist $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ für alle $\alpha \in \Phi_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Für alle $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ ist* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. *Ebenfalls ist $\mathfrak{h}_\alpha := [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$* 1*-dimensional. Sind $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, dann ist $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*

1.6.4 Bemerkung
Das Wurzelsystem einer reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist mit dem Wurzelsystem ihres halbeinfachen Kommutatorideals $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ zu identifizieren. Es gilt nämlich:

$$\langle \Delta_{\mathfrak{g}}^\vee(\mathfrak{h}) \rangle = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{h}_0.$$

Insbesondere ist $\mathfrak{g}$ genau dann halbeinfach, wenn $\langle \Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \rangle = \mathfrak{h}(\mathbb{R})^*$ ist. Und $\mathfrak{g}$ ist genau dann abelsch, wenn $\Delta_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \emptyset$.

[21]Eine solche Bilinearform existiert immer.

Kapitel 2

Graduierungen

2.1 Graduierte Lie-Algebren

Der Begriff der Graduierung wird uns helfen, pro-nilpotente Lie-Algebren zu konstruieren. Graduierungen sind uns bereits bei halbeinfachen Lie-Algebren begegnet; sogar diese werden wir für gewisse Konstruktionen ausnutzen.

2.1.1 Definition (Graduierung)
Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $(A, +)$ eine abelsche Halbgruppe. Eine $\mathbb{K}$-Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathfrak{g}_\alpha$$

heißt A-*Graduierung* von $\mathfrak{g}$, wenn gilt

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \leq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

2.1.2 Bemerkung
Aus der Definition folgt, daß $\mathfrak{g}_0$ eine Lie-Teilalgebra von $\mathfrak{g}$ ist. Für alle $\alpha \in A$ ist $\mathfrak{g}_\alpha$ ein $\mathfrak{g}_0$-Modul.

2.1.3 Beispiel
Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h}$ eine Cartansche Teilalgebra von $\mathfrak{g}$, $\Delta_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ das dazugehörige Wurzelsystem und Π ein Fundamentalsystem in $\Delta_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$.

- Definiere das $(\dim \mathfrak{h})$-dimensionale *Wurzelgitter* $A := \langle \Delta_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) \rangle_\mathbb{Z} \leq \mathfrak{h}^*$. Lemma 1.3.15 besagt, daß $\mathfrak{g}$ A-graduiert ist.
- Für $i \in \mathbb{Z}$ definiere $B_i := \{\sum_{\alpha\in\Pi} k_\alpha \alpha \mid \sum_{\alpha\in\Pi} k_\alpha = i\}$ und $\mathfrak{g}_i := \bigoplus_{\beta \in B_i} \mathfrak{g}_\beta$. Dann ist
$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$$
eine $\mathbb{Z}$-Graduierung von $\mathfrak{g}$.

2.1.4 Definition (Filtrierung)
Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Eine $\mathbb{Z}$-Kette von Teilräumen

$$\ldots \geq \mathfrak{g}_{(-j)} \geq \ldots \geq \mathfrak{g}_{(-1)} \geq \mathfrak{g}_{(0)} \geq \mathfrak{g}_{(1)} \geq \ldots \mathfrak{g}_{(i)} \geq \ldots$$

heißt $\mathbb{Z}$-*Filtrierung* von $\mathfrak{g}$, wenn gilt:

1. $\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{(i)} = 0$ und $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{(i)} = \mathfrak{g}$.
2. $\mathfrak{g}_{(i)} \notin \{0, \mathfrak{g}\} \;\Rightarrow\; \mathfrak{g}_{(i-1)} > \mathfrak{g}_{(i)} > \mathfrak{g}_{(i+1)}$.
3. $\dim \mathfrak{g}_{(i)}/\mathfrak{g}_{(i+1)} < \infty$.
4. $[\mathfrak{g}_{(i)}, \mathfrak{g}_{(j)}] \leq \mathfrak{g}_{(i+j)}$.

Ist für alle $i \leq 0$ (bzw. $i < 0$) $\mathfrak{g}_{(i)} = \mathfrak{g}$, so spricht man von einer $\mathbb{N}$-*Filtrierung* (bzw. $\mathbb{N}_0$-*Filtrierung*) von $\mathfrak{g}$.

2.1.5 Bemerkung
1. Für $i \geq 0$ ist $\mathfrak{g}_{(i)}$ eine Lie-Teilalgebra von $\mathfrak{g}$.
2. Für $i \geq 0$ ist $\mathfrak{g}_{(i)}$ ein Lie-Ideal von $\mathfrak{g}_{(0)}$.

2.1.6 Beispiel
1. Setzt man $\mathfrak{n}_{(i)} := \mathfrak{n}^i$, so ist jede nilpotente Lie-Algebra $\mathfrak{n}$ $\mathbb{N}$-filtriert.
2. Mit $\mathfrak{g}_{(i)} := \bigoplus_{j\geq i} \mathfrak{g}_j$ ist jede $\mathbb{Z}$-graduierte Lie-Algebra auch $\mathbb{Z}$-filtriert.

Ab jetzt betrachten wir nur noch $\mathbb{N}$-filtrierte Algebren.

2.1.7 Lemma
Sei $\mathfrak{g}$ eine $\mathbb{N}$-filtrierte Lie-Algebra, dann faktorisiert die Abbildung

$$\mathfrak{g}_{(i)} \times \mathfrak{g}_{(j)} \xrightarrow{[\cdot,\cdot]} \mathfrak{g}_{(i+j)} \overset{\text{nat.}}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{g}_{(i+j)}/\mathfrak{g}_{(i+j+1)}$$

über $\mathfrak{g}_{(i)}/\mathfrak{g}_{(i+1)} \times \mathfrak{g}_{(j)}/\mathfrak{g}_{(j+1)}$. D.h. das Lie-Produkt induziert für $i, j \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\mathfrak{g}_{(i)}/\mathfrak{g}_{(i+1)} \times \mathfrak{g}_{(j)}/\mathfrak{g}_{(j+1)} \to \mathfrak{g}_{(i+j)}/\mathfrak{g}_{(i+j+1)}. \tag{2.1}$$

Allgemeiner induziert das Lie-Produkt für $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\mathfrak{g}_{(i)}/\mathfrak{g}_{(i+k)} \times \mathfrak{g}_{(j)}/\mathfrak{g}_{(j+l)} \to \mathfrak{g}_{(i+j)}/\mathfrak{g}_{(i+j+\min(k,l))}.$$

2.1.8 Korollar
Sei $\mathfrak{g}$ eine $\mathbb{N}$-filtrierte Lie-Algebra, $\mathfrak{g}_{(i)} \geq \mathfrak{i} \geq \mathfrak{g}_{(i+1)}$ und $\dim(\mathfrak{i}/\mathfrak{g}_{(i+1)}) = 1$. Dann gilt $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] \leq \mathfrak{g}_{(2i+1)}$.

Beweis. Die induzierte Abbildung $\mathfrak{i}/\mathfrak{g}_{(i+1)} \times \mathfrak{i}/\mathfrak{g}_{(i+1)} \to \mathfrak{g}_{(2i)}/\mathfrak{g}_{(2i+1)}$ ist wegen der Antikommutativität der Lie-Klammer die Nullabbildung. $\square$

2.1.9 Korollar
Ist $\mathfrak{n}$ *eine nilpotente Lie-Algebra,* $\mathfrak{n} \notin \{0, \mathbb{K}\}$*. Dann ist* $\dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) \geq 2$.

Beweis. Ist $\dim \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 = 1$, so gilt nach Korollar 2.1.8: $\mathfrak{n}^2 := [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \leq \mathfrak{n}^3$. D.h. $\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}^3 = 0$ und somit $\mathfrak{n} \cong \mathbb{K}$. Widerspruch. □

2.1.10 Definition
Seien $\mathbf{F} := \{\mathfrak{g}_{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ und $\mathbf{F}' := \{\mathfrak{g}_{[i]}\}_{i\in\mathbb{N}}$ zwei $\mathbb{N}$-Filtrierungen von $\mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{g}_{(i)} \leq \mathfrak{g}_{[i]}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so sagt man $\mathbf{F}$ ist gröber als $\mathbf{F}'$, bzw. $\mathbf{F}'$ ist feiner als $\mathbf{F}$.

Beispiel 2.1.6 gibt Anlaß zur folgenden Definition.

2.1.11 Definition ($\mathfrak{not}$-Filtrierung, nil-Filtrierung)
Sei $\mathfrak{g}$ eine $\mathbb{N}$-filtrierte Lie-Algebra.

1. $\mathfrak{g}$ heißt $\mathfrak{not}$-*filtriert*[1], wenn $\dim(\mathfrak{g}_{(i)}/\mathfrak{g}_{(i+1)}) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{g}_{(i)} \neq 0$.

2. Sei $\mathfrak{g}$ eine $\mathbb{N}$-filtrierte Lie-Algebra. Die durch $\mathfrak{g}_{(i)} := \mathfrak{g}^i$ $(i \in \mathbb{N})$ definierte $\mathbb{N}$-Kette ist ebenfalls eine $\mathbb{N}$-Filtrierung, die sog. *nil-Filtrierung* von $\mathfrak{g}$.

2.1.12 Lemma
1. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine* $\mathbb{N}$*-filtrierte Lie-Algebra, dann ist die nil-Filtrierung die gröbste Filtrierung von* $\mathfrak{g}$.

2. *Ist* $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{not}$*-filtriert, so ist die* $\mathfrak{not}$*-Filtrierung eine nicht verfeinerbare Filtrierung von* $\mathfrak{g}$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus deren Definition. □

2.1.13 Definition (residuell nilpotent)
Eine $\mathbb{N}$-filtrierte Lie-Algebra nennt man auch *residuell nilpotent*.

2.1.14 Definition (Graduierungsfunktor)
Sei $\mathfrak{g}$ eine $\mathbb{N}$-filtrierte Lie-Algebra. Man setze $\mathfrak{g}_i := \mathfrak{g}_{(i)}/\mathfrak{g}_{(i+1)}$ und definiere die $\mathbb{N}$-*graduierte* Lie-Algebra

$$\mathbf{gr}(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{g}_i,$$

wobei die Addition komponentenweise erfolgt und die *graduierte* Multiplikation aus den induzierten Abbildungen $\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_{i+j}$ aus (2.1) zusammenzusetzen ist. Seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ $\mathbb{N}$-filtrierte Lie-Algebren und $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein *filtrierter Homomorphismus*, d.h. $\phi\mathfrak{g}_{(i)} \leq \mathfrak{h}_{(i)}$. Dann induziert ϕ die Abbildungen $\phi_i : \mathfrak{g}_i \to \mathfrak{h}_i$ $(i \in \mathbb{N})$, die sich zu einem Lie-Homomorphismus

$$\mathbf{gr}(\phi) : \mathbf{gr}(\mathfrak{g}) \to \mathbf{gr}(\mathfrak{h})$$

[1] Für die Bezeichnung vgl. Bemerkung 3.2.9

zusammensetzen lassen. Dieser Homomorphismus ist *graduiert*, d.h.

$$\mathbf{gr}(\phi)\mathfrak{g}_i \leq \mathfrak{h}_i.$$

gr ist somit ein *Funktor* von der Kategorie der filtrierten Lie-Algebren (mit den filtrierten Homomorphismen als Morphismen) *auf* die der graduierten Lie-Algebren (mit den graduierten Homomorphismen als Morphismen).

2.1.15 Bemerkung
Sei $\mathfrak{n}$ eine residuell nilpotente Lie-Algebra, ausgestattet mit der nil-Filtrierung. Dann ist $\mathbf{gr}_{\mathrm{nil}}(\mathfrak{n})$ ebenfalls eine residuell nilpotente Lie-Algebra. Bei $\mathfrak{n}$ und $\mathbf{gr}_{\mathrm{nil}}(\mathfrak{n})$ stimmen die Dimensionen der k-ten Faktoren der absteigenden Zentralreihen jeweils überein. Insbesondere bleibt also die Nilpotenzklasse erhalten, dagegen kann sich die Auflösbarkeitsstufe bei $\mathbf{gr}_{\mathrm{nil}}(\mathfrak{n})$ verkleinern (vgl. Bemerkung 3.2.9).

2.1.16 Definition ($\mathfrak{not}$-Graduierung, nil-Graduierung)
Sei $\mathfrak{n}$ eine nilpotente bzw. residuell nilpotente Algebra.

1. $\mathfrak{n}$ nennt man *nil-graduiert*, falls $\mathbf{gr}_{\mathrm{nil}}(\mathfrak{n}) \cong \mathfrak{n}$.

2. Ist $\mathfrak{n}$ $\mathfrak{not}$-filtriert, so nennt man sie $\mathfrak{not}$-*graduiert*, falls $\mathbf{gr}_{\mathfrak{not}}(\mathfrak{n}) \cong \mathfrak{n}$. Dabei ist $\mathbf{gr}_{\mathfrak{not}}$ die Graduierung bezüglich der $\mathfrak{not}$-Filtrierung.

2.1.17 Bemerkung
Die $\mathfrak{not}$-Graduierung und die nil-Graduierung schließen einander nicht aus. Die Lie-Algebra $\mathfrak{a}^{[0]}$ aus Bemerkung 3.2.17 ist sowohl $\mathfrak{not}$- als auch nil-graduiert.

2.2 Loop-Algebren

Sei $\mathfrak{g}$ eine *komplexe* halbeinfache Lie-Algebra und σ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$ der *endlichen* Ordnung m. Dann ist σ diagonalisierbar und die Zerlegung von $\mathfrak{g}$ nach Eigenräumen von σ ist eine $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Graduierung von $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i^\sigma.$$

Dabei ist $\mathfrak{g}_i^\sigma$ der Eigenraum zum Eigenwert ϵ^i, wobei ϵ eine primitive m-te Einheitswurzel ist. Umgekehrt definiert jede $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Graduierung $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i^\sigma$ einen Automorphismus σ von $\mathfrak{g}$, mit $\sigma(a_i) = \epsilon^i a_i$ für alle $a_i \in \mathfrak{g}_i^\sigma$. Es gilt $\sigma^m = \mathrm{id}$.

In diesem Abschnitt[2] sind alle Lie-Algebren *komplex.*

[2]Der Stoff in diesem Abschnitt orientiert sich nach der Darstellung in [Kac69] und [Hel].

2.2.1 Definition (Loop-Algebra)
Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und σ ein Automorphismus der Ordnung m. Die durch
$$L(\mathfrak{g},\sigma) := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} x^j \mathfrak{g}^\sigma_{j(\mathrm{mod}\ m)} \leq \mathbb{C}[x]\otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$$
definierte $\mathbb{Z}$-graduierte Lie-Algebra nennt man die *Loop-Algebra*[3] von $\mathfrak{g}$ bezüglich des Automorphismus σ.

Unter der Voraussetzung, daß die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ einfach ist, werden wir sehen, daß der Isomorphie-Typ von $L(\mathfrak{g},\sigma)$ (ohne Berücksichtigung der Graduierung) nur von der Restklasse $\sigma\mathrm{Int}\mathfrak{g} \subset \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ abhängt. Somit läßt sich σ durch einen Automorphismus ν des Dynkin-Diagramms von $\mathfrak{g}$ ersetzen.

2.2.2 Lemma
$\mathfrak{g}^\sigma_0$ ist eine reduktive Teilalgebra von $\mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{h}^\sigma_0$ eine Cartansche Teilalgebra[4] *von $\mathfrak{g}^\sigma_0$, dann ist der Zentralisator $\mathfrak{h} := C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^\sigma_0)$ von $\mathfrak{h}^\sigma_0$ in $\mathfrak{g}$ eine Cartansche Teilalgebra von $\mathfrak{g}$. Insbesondere ist $\mathfrak{g}^\sigma_0 \neq 0$.*

Es läßt sich nun für $\mathfrak{g}$ ein Wurzel-Begriff einführen, der mit der vorliegenden $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Graduierung kompatibel ist. Besteht keine Verwechselungsgefahr, so schreiben wir $\mathfrak{g}_i$ und $\mathfrak{h}_0$ anstelle von $\mathfrak{g}^\sigma_i$ und $\mathfrak{h}^\sigma_0$.

2.2.3 Definition (σ-Wurzel)
Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, σ ein Automorphismus der Ordnung m und $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$ die dazugehörige $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Graduierung. Weiterhin sei $\mathfrak{h}_0$ eine Cartansche Teilalgebra von $\mathfrak{g}_0$. Für $\alpha \in \mathfrak{h}^*_0$ und $i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ heißt das Paar $\bar\alpha = (\alpha, i)$ *σ-Wurzel* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}_0$, falls der Wurzelraum
$$\mathfrak{g}^{\bar\alpha} := \{X \in \mathfrak{g}_i |\ [H,X] = \alpha(H)X,\ \text{für alle } H \in \mathfrak{h}_0\} \neq 0$$
ist. Wir definieren $(\alpha,i)\pm(\alpha',i') = (\alpha\pm\alpha', i\pm i')$. Mit $\bar\Delta$ bezeichnet man die Menge *aller* σ-Wurzel $\bar\alpha \neq (0,0)$ und mit $\bar\Delta^0$ die von der Form $(0,i)$, $i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

2.2.4 Lemma
Analog zur klassischen Wurzelraumzerlegung gilt:
$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{h}_0 \oplus \bigoplus_{\bar\alpha\in\bar\Delta} \mathfrak{g}^{\bar\alpha}, \quad \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g}^{(0,0)}, \qquad (2.2)\\ C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_0) &= \bigoplus_{\bar\alpha\in\bar\Delta^0} \mathfrak{g}^{\bar\alpha},\\ \mathfrak{g} &= C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_0) \oplus \bigoplus_{\bar\alpha\in\bar\Delta\setminus\bar\Delta^0} \mathfrak{g}^{\bar\alpha}. \end{aligned}$$

[3]Helgason benutzt in seinem Buch [Hel] die Bezeichnung „covering algebra“.
[4]In [Hel] wird die Cartansche Teilalgebra von $\mathfrak{g}^\sigma_0$ mit $\mathfrak{h}$ bezeichnet.

Die Killing-Form von $\mathfrak{g}$, eingeschränkt auf $\mathfrak{h}_0$, ist nicht ausgeartet[5]*. Die Wurzelraumzerlegung (2.2) ist eine $\langle\bar{\Delta}\rangle_{\mathbb{Z}}$-Graduierung*[6]*:*

$$[\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}, \mathfrak{g}^{\bar{\beta}}] \subset \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}.$$

Analog zu den Ergebnissen im vorigen Kapitel erhält man:

2.2.5 Satz
Seien $\bar{\beta} \in \bar{\Delta}$ und $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta} \setminus \bar{\Delta}^0$. Dann gilt:

(i) $\dim \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}} = 1$.

(ii) Ist $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta} \setminus \bar{\Delta}^0$, dann ist $-\bar{\alpha} \in \bar{\Delta} \setminus \bar{\Delta}^0$ und $[\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}, \mathfrak{g}^{-\bar{\alpha}}] \neq 0$.

(iii) Der $\bar{\alpha}$-String $\bar{\beta} + \mathbb{Z}\bar{\alpha}$ durch $\bar{\beta}$ ist von der Form

$$\{\bar{\beta} + k\bar{\alpha} | \ -p \leq k \leq q\}, \quad p, q \geq 0.$$

Es gilt:

$$p - q = \langle\bar{\beta}|\bar{\alpha}\rangle.$$

(iv) $[\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}, \mathfrak{g}^{\bar{\beta}}] = \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}$, falls $\bar{\alpha} + \bar{\beta} \notin \bar{\Delta}^0$.

Für die Loop-Algebra $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ lassen sich analoge Begriffe entwickeln. Wir schreiben $L(\mathfrak{g}, \sigma) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} L_j^\sigma$, mit $L_j^\sigma := x^j \mathfrak{g}^\sigma_{j (\mathrm{mod}\ m)}$.

2.2.6 Definition (σ-Wurzel)
Sei $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ eine Loop-Algebra und $\mathfrak{h}_0$ eine Cartansche Teilalgebra von $L_0^\sigma \equiv \mathfrak{g}_0^\sigma$. Für $\alpha \in \mathfrak{h}_0^*$ und $j \in \mathbb{Z}$ heißt das Paar $\widetilde{\alpha} = (\alpha, j)$ *σ-Wurzel* von $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ bezüglich $\mathfrak{h}_0$, falls der Wurzelraum

$$L^{\widetilde{\alpha}} := \{X \in L_j^\sigma | \ [H, X] = \alpha(H)X, \text{ für alle } H \in \mathfrak{h}_0\} \neq 0$$

ist. Wir definieren $(\alpha, j) \pm (\alpha', j') = (\alpha \pm \alpha', j \pm j')$. Mit $\widetilde{\Delta}$ bezeichnet man die Menge *aller* σ-Wurzeln $\widetilde{\alpha} \neq (0, 0)$ und mit $\widetilde{\Delta}^0$ die von der Form $(0, j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

2.2.7 Bemerkung
Ist (α, j) eine σ-Wurzel und $j \equiv j' (\mathrm{mod}\ m)$, dann ist ebenfalls (α, j') eine σ-Wurzel und die Abbildung

$$\widetilde{\alpha} = (\alpha, j) \mapsto (\alpha, j (\mathrm{mod}\ m)) = \bar{\alpha}$$

bildet $\widetilde{\Delta}$ auf $\bar{\Delta}$ ab. Somit lassen sich alle oben genannten Eigenschaften von $\bar{\Delta}$ und $\bar{\Delta}^0$ auf $\widetilde{\Delta}$ und $\widetilde{\Delta}^0$ übertragen.

[5]Dies ist i.a. *nicht* die Einschränkung der Killing-Form von $\mathfrak{g}_0$ auf $\mathfrak{h}_0$. Letztere ist genau dann nicht ausgeartet, wenn $\mathfrak{g}_0$ halbeinfach ist, was i.a. nicht gilt (vgl. Lemma 2.2.2).

[6]Für $\bar{\alpha} \notin \bar{\Delta}$, ist $\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}} = 0$ zu setzen.

Insbesondere halten wir fest:

2.2.8 Lemma

1. $L^{\widetilde{\alpha}} = x^j \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}$.

2. *Die Wurzelraumzerlegung*

$$L(\mathfrak{g}, \sigma) = \mathfrak{h}_0 + \sum_{\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}} L^{\widetilde{\alpha}} \tag{2.3}$$

ist eine $\langle \widetilde{\Delta} \rangle_{\mathbb{Z}}$*-Graduierung:* $[L^{\widetilde{\alpha}}, L^{\widetilde{\beta}}] \subset L^{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}$.

2.2.9 Definition ($\widetilde{\Delta}^+$, $\widetilde{\Pi}$, Π)

Sei Δ_0 ein Wurzelsystem von $\mathfrak{g}_0$ bezüglich $\mathfrak{h}_0$ und Δ_0^+ das dazugehörige positive System von Wurzeln. Jede Wurzel $\alpha \in \Delta_0$ ist vermöge der Identifikation[7] $\alpha \equiv (\alpha, 0)$ eine σ-Wurzel aus $\widetilde{\Delta}$. Die Menge

$$\widetilde{\Delta}^+ = \Delta_0^+ \cup \{(\alpha, j) \in \widetilde{\Delta} |\ j > 0\}$$

nennt man *Menge der positiven σ-Wurzeln* in $\widetilde{\Delta}$. Eine positive σ-Wurzel $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}^+$ heißt *einfach*, wenn sie nicht als Summe von zwei positiven σ-Wurzeln darstellbar ist. Die Menge der einfachen σ-Wurzeln bezeichnen wir mit $\widetilde{\Pi}$. Ist etwa $\widetilde{\Pi} = \{(\alpha_0, s_0), (\alpha_1, s_1), \ldots\}$ so heißt $\Pi := \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ *erweitertes Fundamentalsystem* von $\mathfrak{g}$ bezüglich σ.

2.2.10 Bemerkung

Die Einschränkung der Killing-Form von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}_0$ ist nicht ausgeartet. Diese induziert somit auf $\mathfrak{h}_0^*$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform $(\cdot, \cdot)$, die sogar auf $E := \langle \Pi \rangle_{\mathbb{R}}$ positiv definit ist.

2.2.11 Lemma

(i) *Jedes $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}$ hat eine eindeutige Darstellung in der Form*

$$\widetilde{\alpha} = \pm \sum_i k_i \widetilde{\alpha}_i, \quad k_i \in \mathbb{N}_0,\ \widetilde{\alpha}_i \in \widetilde{\Pi}.$$

(ii) $\widetilde{\Pi} \subset \widetilde{\Delta} \setminus \widetilde{\Delta}^0$.

(iii) Π *ist ein linear abhängiges System von Vektoren, das* $\mathfrak{h}_0^*$ *erzeugt.*

(iv) *Für $i \neq j$ ist*

$$a_{ij} := \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle \in -\mathbb{N}_0;$$

insbesondere ist $\alpha_i \neq \alpha_j$.

[7] Es gilt sogar: $(\alpha, 0) \in \widetilde{\Delta} \Rightarrow \alpha \in \Delta_0$.

2.2.12 Korollar
$\widetilde{\Pi}$ und Π sind endliche Mengen mit derselben Kardinalität.

Beweis. Dies folgt aus Punkt (iv) des Lemmas. □

2.2.13 Definition (Vektorsystem)
Eine Teilmenge $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset E$ des Euklidischen Vektorraumes E heißt *(zulässiges) Vektorsystem*[8], wenn gilt:

1. Π ist eine endliche Teilmenge von E und $0 \notin \Pi$.

2. Für $i \neq j$ ist $a_{ij} := \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle \in -\mathbb{N}_0$.

O.B.d.A. kann man annehmen, daß $\langle \Pi \rangle = E$ ist. Ein Vektorsystem heißt zerlegbar, wenn es als orthogonale Summe von zwei nicht trivialen Vektorsystemen darstellbar ist.

2.2.14 Lemma
Jede echte Teilmenge eines unzerlegbaren, linear abhängigen Vektorsystems ist linear unabhängig. Insbesondere gilt: $|\Pi| = \dim E + 1$.

2.2.15 Bemerkung

- Aus Lemma 2.2.11 (iii) & (iv) folgt, daß jedes erweiterte Fundamentalsystem Π ein *linear abhängiges* Vektorsystem ist. Die Umkehrung ist wahr (vgl. Satz 2.2.19).

- Die *linear unabhängigen* Vektorsysteme sind genau die Fundamentalsysteme (vgl. Satz 1.4.16).

2.2.16 Lemma
Sei $\widetilde{\Pi}$ ein System einfacher σ-Wurzeln von $L(\mathfrak{g}, \sigma)$. Dann ist $\widetilde{\Pi}$ $\mathbb{Z}$-linear unabhängig.

Die unzerlegbaren linear abhängigen Vektorsysteme wurden von Coxeter klassifiziert. Jedes Vektorsystem ist durch sein Dynkin-Diagramm eindeutig festgelegt.

2.2.17 Satz
Die Dynkin-Diagramme der linear abhängigen Vektorsysteme sind in Abbildung 2.1 (Seite 39) aufgelistet. Dabei sind die Zahlen a_i ($i = 0, \dots, l$) an den Ecken eines jeden Diagramms die Koeffizienten der linearen Abhängigkeit (2.4) zwischen den Vektoren α_i des Systems:

$$1 \cdot \alpha_0 + \sum_{i=1}^{l} a_i \alpha_i = 0. \tag{2.4}$$

[8] In [OnVi] wird die Terminologie „admissible system of vectors“ benutzt.

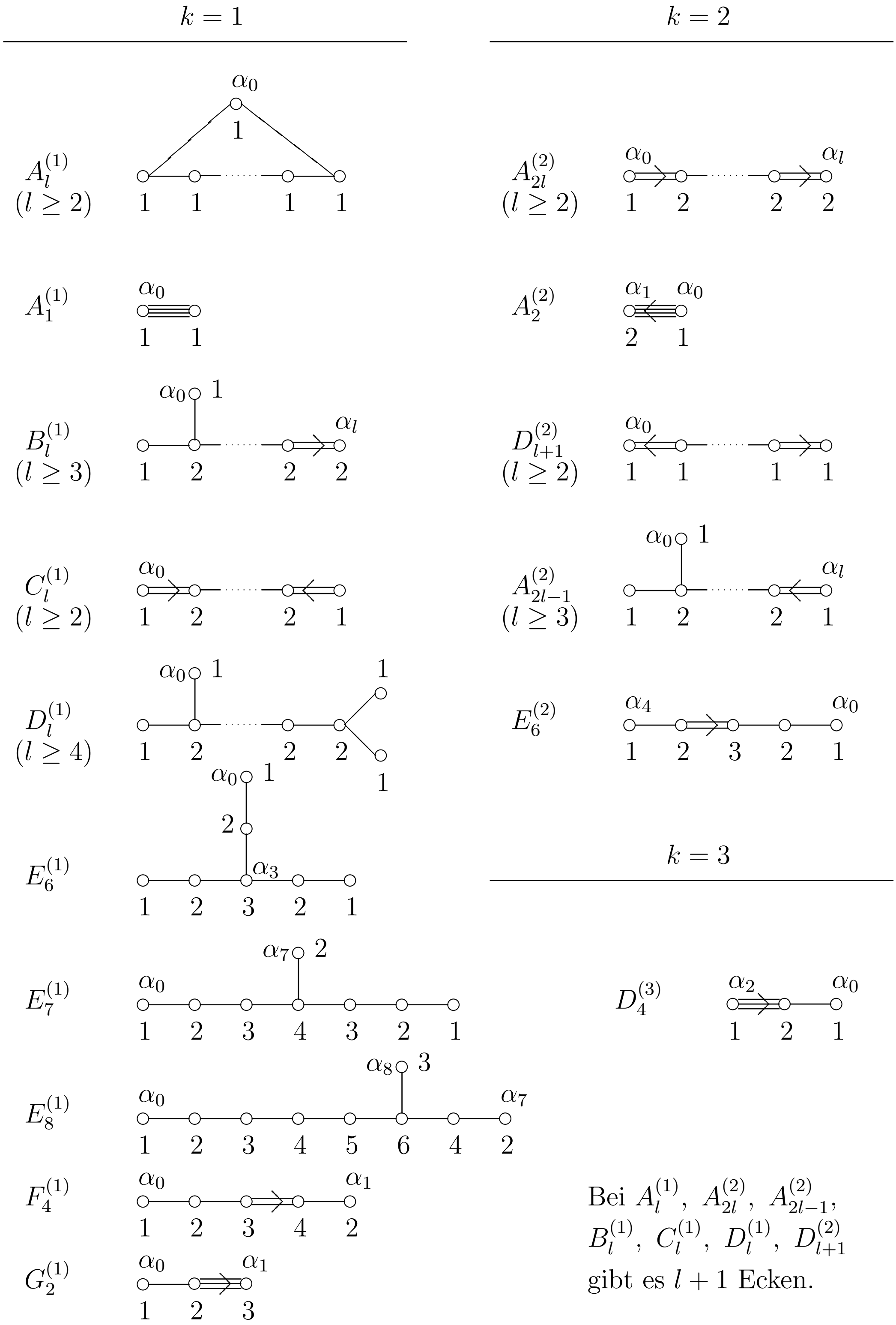

Abbildung 2.1: Affine Dynkin-Diagramme

2.2.18 Bemerkung

- Bei der linearen Beziehung (2.4) ist $a_0 = 1$ und somit sind die restlichen a_i eindeutig bestimmt (vgl. Lemma 2.2.14).

- Beim Vektorsystem $X_n^{(1)}$ ($X_n \in \{A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n\}$) ist α_0 nichts anderes als die niedrigste Wurzel[9] $-\delta$ des Wurzelsystems X_n.

- Zwischen den Zeilen $\langle \alpha_i | \cdot \rangle$ der zum Vektorsystem gehörigen Cartan-Matrix $A = (a_{ij})$ gilt dieselbe lineare Beziehung.

2.2.19 Satz

Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie-Algebra vom Typ[10] X_n. Weiter seien ν ein Automorphismus des Dynkin-Diagramms von $\mathfrak{g}$ und k die Ordnung von ν. Dann ist das Vektorsystem Π der Loop-Algebra $L(\mathfrak{g}, \nu)$ gleich dem linear abhängigen Vektorsystem $X_n^{(k)}$. Die Teilalgebra $\mathfrak{g}_0^\nu = L_0^\nu$ ist einfach. Für $k = 1$ ist $\mathfrak{g}_0^\nu = \mathfrak{g}$ und für $k = 2$ oder $k = 3$ ist $\mathfrak{g}_0^\nu$ aus der folgenden Tabelle zu entnehmen:

$\mathfrak{g}$	A_{2l}	A_2	A_{2l-1}	D_{l+1}	E_6	D_4
k	2	2	2	2	2	3
$\mathfrak{g}_0^\nu$	B_l	A_1	B_l	C_l	F_4	G_2

Im weiteren sei $\mathfrak{g}$ eine *einfache* Lie-Algebra und ν ein Automorphismus des Dynkin-Diagramms von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}_0^\nu$ eine Cartansche Teilalgebra von $\mathfrak{g}_0^\nu$. Der Rang der einfachen Algebra $\mathfrak{g}_0^\nu$ sei l. Die Loop-Algebra $L(\mathfrak{g}, \nu)$ spielt in diesem Zusammenhang eine zentrale Rolle. Wir fangen mit der Beschreibung ihres System einfacher ν-Wurzeln $\widetilde{\Pi}$ an.

2.2.20 Bemerkung

Da k höchstens 3 ist, ist $\mathfrak{g}_1^\nu \neq 0$. Für $k = 1$ ist $\mathfrak{g}_1^\nu = \mathfrak{g}_0^\nu = \mathfrak{g}$. Für $k = 2$ ist $\dim \mathfrak{g}_1^\nu = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_0^\nu$ und für $k = 3$ ist $\dim \mathfrak{g}_1^\nu = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_0^\nu)$.

2.2.21 Satz

Sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ ein Fundamentalsystem von $\mathfrak{g}_0^\nu$ bezüglich $\mathfrak{h}_0^\nu$ und α_0 das niedrigste Gewicht von $\mathfrak{g}_1^\nu$ als $\mathfrak{g}_0^\nu$-Modul. Definiere

$$\widetilde{\alpha}_0 := (\alpha_0, 1),\ \widetilde{\alpha}_i := (\alpha_i, 0) \quad (i = 1, \ldots, l).$$

Dann ist

$$\Pi = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_l\}$$

ein erweitertes Fundamentalsystem von $\mathfrak{g}$ bezüglich ν und

$$\widetilde{\Pi} = \{\widetilde{\alpha}_0, \ldots, \widetilde{\alpha}_l\}$$

ein System einfacher ν-Wurzeln von $L(\mathfrak{g}, \nu)$.

---

[9] Vgl. Satz 1.4.16.

[10] Dabei ist $X_n \in \{A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n\}$.

2.2.22 Definition (Graduierung vom Typ $(k; s_0, \dots, s_l)$)
Sei $\widetilde{\alpha}$ eine ν-Wurzel von $L(\mathfrak{g}, \nu)$. Dann gestattet $\widetilde{\alpha}$ nach Lemma 2.2.16 eine eindeutige Darstellung

$$\widetilde{\alpha} = \sum_{i=0}^{l} k_i \widetilde{\alpha}_i.$$

Sei $(s_0, \dots, s_l)$ ein Tupel von ganzen Zahlen ≥ 0 mit $\mathrm{ggT}(s_0, \dots, s_l) = 1$. Definiere

$$\mathrm{grad}\widetilde{\alpha} = \sum_{i=0}^{l} k_i s_i, \qquad L_j := \sum_{\mathrm{grad}\widetilde{\alpha}=j} L^{\widetilde{\alpha}}.$$

Dann ist $L(\mathfrak{g}, \nu) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} L_j$ eine $\mathbb{Z}$-Graduierung von $L(\mathfrak{g}, \nu)$, die sog. *Graduierung vom Typ* $(k; s_0, \dots, s_l)$. Um den Typ der Graduierung hervorzuheben, schreiben wir

$$X_n^{(k)}(s_0, \dots, s_l)$$

anstellte von $L(\mathfrak{g}, \nu)$, wobei X_n der Isomorphie-Typ von $\mathfrak{g}$ ist.

2.2.23 Satz
Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie-Algebra und σ ein Automorphismus endlicher Ordnung. Dann existiert ein eindeutiger Automorphismus ν des Dynkin-Diagramms von $\mathfrak{g}$ mit $\nu \in \sigma\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ und eine $\mathbb{Z}$-Graduierung von $L(\mathfrak{g}, \nu)$ vom Typ $(k; s_0, \dots, s_l)$, so daß die Algebren $L(\mathfrak{g}, \nu)$ und $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ unter Einbeziehung der $\mathbb{Z}$-Graduierung isomorph sind.

Kapitel 3

Pro-Nilpotente Lie-Algebren

In diesem Kapitel wird der Begriff der *Lie-Koklasse* eingeführt und diskutiert. Dazu werden keine weiteren Hilfsmittel benötigt.

3.1 Lie-Koklasse

3.1.1 Definition (pro-nilpotent)
Eine Lie-Algebra $\mathfrak{n}$ heißt *pro-nilpotent*, wenn sie inverser Limes von endlich-dimensionalen nilpotenten Lie-Algebren ist.

3.1.2 Bemerkung
Pro-nilpotente und residuell-nilpotente Lie-Algebren brauchen i.a. nicht nilpotent zu sein. Die interessantesten sind sogar diejenigen, die *nicht* auflösbar sind.

Jede pro-nilpotente Lie-Algebra ist residuell-nilpotent. Umgekehrt kann man jede residuell-nilpotente Lie-Algebra $\mathfrak{n}$ auf eine *kanonische* Weise zu einer pro-nilpotenten Lie-Algebra $\tilde{\mathfrak{n}}$ komplettieren:

$$\tilde{\mathfrak{n}} := \varprojlim \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^i.$$

Deshalb treffen wir folgende

Konvention[1]**:** Wir nennen eine Lie-Algebra *pro-nilpotent*, wenn sie residuell-nilpotent ist.

3.1.3 Definition (virtuell pro-nilpotent)
Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *virtuell pro-nilpotent*, wenn sie ein *eindeutiges* maximales pro-nilpotentes Ideal $\mathfrak{n}$ von *endlicher* Kodimension enthält.

[1] Dies ist keine übliche Konvention.

3.1.4 Definition (Lie-Koklasse)

1. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie-Algebra und $\mathfrak{n} := \mathrm{nil}\mathfrak{g}$ das Nilradikal von $\mathfrak{g}$. Definiere $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$.

$$\mathfrak{q}\text{-Lie-cocl}(\mathfrak{g}) = \mathrm{cocl}(\mathfrak{g}) := f - c,$$

wobei f die Anzahl der $\mathfrak{q}$-Kompositionsfaktoren und c die Nilpotenzklasse von $\mathfrak{n}$ ist.

2. Sei $\mathfrak{g}$ eine virtuell pro-nilpotente Lie-Algebra, $\mathfrak{n}$ das maximale pro-nilpotente Ideal von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ die *endlich-dimensionale reduktive* Faktoralgebra. Die Lie-Koklasse von $\mathfrak{g}$ ist durch

$$\mathfrak{q}\text{-Lie-cocl}(\mathfrak{g}) = \mathrm{cocl}(\mathfrak{g}) := \lim_{\mathrm{i}\to\infty} \mathrm{cocl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}^i)$$

definiert, wobei $\mathfrak{n}^i$ die Glieder der absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{n}$ sind.

3.1.5 Bemerkung

- Da die Potenzen von $\mathfrak{n}$, nämlich die Glieder der absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{n}$, charakteristische Ideale in $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ und deshalb auch Ideale in $\mathfrak{g}$ sind, induziert die natürliche Operation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{n}$ durch Einschränkung eine Operation auf den Potenzen $\mathfrak{n}^i$ und somit auch auf den Faktoren $\mathfrak{n}^i/\mathfrak{n}^{i+1}$ ($i \in \mathbb{N}$). Wegen der Definition von $\mathfrak{n}^{i+1} := [\mathfrak{n}^i, \mathfrak{n}]$ liegt $\mathfrak{n}$ im Kern aller Operationen auf den Faktoren. Diese Operationen lassen sich also über $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ faktorisieren. Die $\mathfrak{q}$-Lie-Koklasse ist also wohldefiniert.

- Wir sind im Grunde an demjenigen Koklassenbegriff interessiert, bei dem eine *endliche* Gruppe Q anstelle von $\mathfrak{q}$ operiert. Um zur endlichen Gruppe zu gelangen, ersetzen wir zuerst die *endlich-dimensionale reduktive* Faktoralgebra $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ durch eine[2] *Lie-Gruppe*, dann versuchen wir, eine geeignete endliche Untergruppe zu finden, so daß die Koklasse erhalten bleibt. Notwendig dafür ist, daß die Faktoren der absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{n}$ von beschränkter Dimension sind.

3.1.6 Lemma

$\mathfrak{g}$ *ist von Koklasse* $k \Rightarrow \dim(\mathrm{nil}\mathfrak{g}/\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}) \leq k + 1$.

Beweis. $[\mathrm{rad}\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$. □

3.1.7 Bemerkung

Sei $\mathfrak{g}$ von Koklasse 0 und $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g} = 0$, dann ist $\mathrm{rad}\mathfrak{g} = \mathrm{nil}\mathfrak{g}$ ein 1-dimensionales Ideal von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{q} \oplus \mathbb{K}$ ist also eine reduktive Algebra mit 1-dimensionalem Zentrum.

3.1.8 Beispiel

Man nehme für $\mathfrak{g}$ etwa $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \cong \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{K}$.

[2]Die Lie-Gruppe einer Lie-Algebra ist i.a. *nicht* eindeutig.

Die Aussage von Lemma 3.1.6 läßt sich für $k = 0$ verbessern:

3.1.9 Lemma
Sei $\mathfrak{g}$ *von Koklasse 0 und* $\mathrm{rad}_n(\mathfrak{g}) \neq 0$, *dann gilt* $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g} = \mathrm{nil}\mathfrak{g}$.

BEWEIS. Man benutze wieder die Identität $[\mathrm{rad}\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$ und die Tatsache, daß für eine nilpotente Lie-Algebra $\mathfrak{n}$ ($\dim\mathfrak{n} \geq 2$) $\dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}') \geq 2$ gilt. □

3.2 Koklasse 1

Als Anwendung können wir nun einen Satz beweisen, der uns zwei Familien von endlich-dimensionalen Lie-Algebren von Koklasse 1 liefern wird. Die erste Familie gehört zur größeren Klasse der *filiform*[3] Lie-Algebren. Die zweite ist mit den irreduziblen Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren eng verknüpft. Jede Algebra aus der zweiten Familie läßt sich in natürlicher Weise zu einer virtuell pro-nilpotenten Lie-Algebra der Koklasse 1 erweitern.

3.2.1 Satz
Sei $\mathfrak{g}$ *eine endlich-dimensionale Lie-Algebra,* $\mathrm{rad}\mathfrak{g} = \mathrm{nil}\mathfrak{g}$ *nilpotent, nicht abelsch und* $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$ *abelsch*[4]. $\mathfrak{g}$ *ist genau dann von Koklasse 1, wenn einer der folgenden Fälle eintritt:*

1. $\dim(\mathrm{nil}\mathfrak{g}/\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}) = 1$ *und* $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$ *ist ein unzerlegbarer* $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$*-Modul.*
2. $\dim(\mathrm{nil}\mathfrak{g}/\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}) = 2$ *und* $\mathrm{nil}\mathfrak{g}$ *ist eine* filiform *Lie-Algebra, mit abelschem Kommutatorideal.*

Zusatz:

- *Im ersten Fall ist* $\mathfrak{g}$ *eine* reduktiv-zerfallende *Erweiterung*[5], *d.h. es existiert ein* $Y \in \mathrm{rad}\mathfrak{g}\backslash\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$ *mit* $\mathfrak{g} = \mathrm{rad}_n\mathfrak{g} \rtimes (\langle Y\rangle \oplus \mathfrak{s})$. $\mathfrak{s}$ *ist die Levi-Teilalgebra von* $\mathfrak{g}$. $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g} \cong_{\mathfrak{s}} \bigoplus_{i=1}^m V$, *wobei* V *ein nicht-trivialer irreduzibler* $\mathfrak{s}$*-Teilmodul der Multiplizität* $m \geq 2$ *ist.* Y *operiert als* nicht-trivialer *nilpotenter* $\mathfrak{s}$*-Endomorphismus auf* $\bigoplus_{i=1}^m V = \mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$, *nämlich*

$$\mathrm{ad}Y = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \mathrm{id} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

---

[3]Eine *filiform* Lie-Algebra ist eine nilpotente Lie-Algebra von maximaler Nilpotenzklasse $c = \dim\mathfrak{n} - 1$. Die filiform Algebren sind also genau die *endlich*-dimensionalen Koklasse 1 Lie-Algebren.

[4]Das bedeutet, daß die Auflösbarkeitsstufe von $\mathfrak{n} := \mathrm{nil}\mathfrak{g}$ gleich 2 ist, was eine erhebliche Einschränkung darstellt.

[5]D.h. die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathrm{rad}_n\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathrm{rad}_n\mathfrak{g} \to 0$ spaltet auf.

- *Im zweiten Fall ist die Levi-Zerlegung direkt, d.h.* $\mathfrak{s}$ *operiert trivial auf* $\mathrm{rad}\mathfrak{g}$. $\mathrm{rad}\mathfrak{g}$ *ist eine filiform Lie-Algebra mit* abelschem *Kommutatorideal.* $\mathfrak{g}$ *ist* keine *reduktiv-zerfallende Erweiterung.*

BEWEIS. Wir vereinbaren $\mathfrak{n} := \mathrm{rad}\mathfrak{g} = \mathrm{nil}\mathfrak{g}$.
($\Leftarrow$) Aus dem Zusatz folgt die Rückrichtung. Nun beweisen wir den Zusatz.
ad 1. $\mathfrak{s}$ operiert trivial auf $\mathfrak{n}/\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{s}$ halbeinfach operiert, existiert ein $Y \in \mathfrak{n} \setminus \mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$ mit $[Y,\mathfrak{s}] = 0$. $\mathfrak{g}$ ist somit eine reduktiv-zerfallende Erweiterung, d.h. $\mathfrak{g} = \mathrm{rad}_n\mathfrak{g} \rtimes (\langle Y\rangle \oplus \mathfrak{s})$. Da $\mathfrak{n}$ nilpotent, nicht abelsch ist, operiert Y nilpotent *nicht-trivial* auf $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$. Wegen $[Y,\mathfrak{s}] = 0$, operiert Y außerdem als $\mathfrak{s}$-Endomorphismus. Aus der vorausgesetzten Unzerlegbarkeit der Operation folgt somit, daß $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$ aus *einer* homogenen Komponente der Multiplizität ≥ 2 besteht, genauer $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g} \cong_{\mathfrak{s}} \bigoplus_{i=1}^m V$ $(m \geq 2)$. Y operiert o.B.d.A. als eine Nebendiagonalmatrix.
ad 2. $\mathfrak{s}$ operiert trivial auf $\mathfrak{n}/\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}$ operiert trivial auf $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$, da es eine charakteristische Fahne normalisieren und somit zentralisieren muß. Da $\mathfrak{s}$ halbeinfach ist, operiert $\mathfrak{s}$ trivial auf $\mathfrak{n}$ und die Levi-Zerlegung ist direkt.
($\Rightarrow$) Nach Lemma 3.1.6 gilt $\mathfrak{n}/\mathrm{rad}_n\mathfrak{g} \leq 2$. $\dim = 0$ ist ausgeschlossen, da dann $\mathfrak{n} = \mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$ und somit abelsch sein muß.
$\dim = 1$. Dann existiert ein $Y \in \mathfrak{n}\setminus\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$ mit $[Y,\mathfrak{s}] = 0$ und $\mathfrak{g} = \mathrm{rad}_n\mathfrak{g} \rtimes (\langle Y\rangle \oplus \mathfrak{s})$. Da $\mathfrak{n}$ nilpotent ist, operiert Y nilpotent auf $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$. Wäre nun $\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$ zerlegbar als $(\langle Y\rangle \oplus \mathfrak{s})$-Modul, so gelte für $\mathfrak{n} = \mathrm{nil}\mathfrak{g}$: $\dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}') = \dim(\mathfrak{n}/[\mathrm{rad}_n\mathfrak{g}, Y]) \geq 3$. Dies ist ein Widerspruch zu Koklasse 1.
$\dim = 2$. Wegen Koklasse 1 folgt $\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}' = \mathrm{rad}_n\mathfrak{g}$. Wegen $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \wedge \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \twoheadrightarrow \mathfrak{n}^2/\mathfrak{n}^3$ ist $\mathfrak{n}^2/\mathfrak{n}^3$ das triviale $\mathfrak{s}$-Modul. Wegen $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \otimes \mathfrak{n}^{k-1}/\mathfrak{n}^k \twoheadrightarrow \mathfrak{n}^k/\mathfrak{n}^{k+1}$ operiert $\mathfrak{s}$ ebenfalls trivial auf $\mathfrak{n}^k/\mathfrak{n}^{k+1}$ für alle $k \geq 3$ und wegen $\mathrm{cocl} = 1$ dürfen sie höchstens die Dimension 1 haben. □

3.2.2 Bemerkung

- Die Voraussetzung $\mathrm{rad}\mathfrak{g} = \mathrm{nil}\mathfrak{g}$ bedeutet, daß der abelsche Anteil $\mathrm{rad}\mathfrak{g}/\mathrm{nil}\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathrm{nil}\mathfrak{g}$ trivial ist, also daß $\mathfrak{q}$ halbeinfach ist.
- Die filiform Lie-Algebren mit abelschem Kommutatorideal wurden 1974 von Bratzlavsky [Br74] klassifiziert.
- Jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, wobei $\mathrm{rad}\mathfrak{g}$ eine filiform ist, ist von Koklasse 1. Es gilt sogar: Die filiform Lie-Algebren sind genau diejenigen Lie-Algebren mit 0-Lie-cocl=1.

3.2.1 Filiform Lie-Algebren

3.2.3 Lemma
Sei $\mathfrak{n}$ *eine* filiform *Lie-Algebra der Stufe* s, $\dim\mathfrak{n} \geq 2$. *Dann gilt für die Dimensionen der* Kommutatorfaktoren $\mathfrak{n}^{(i)}/\mathfrak{n}^{(i+1)}$ $(i \geq 0)$*:*

$$(\dim \mathfrak{n}^{(i)}/\mathfrak{n}^{(i+1)})_{0\leq i\leq s-1} \geq (2, 3, 6, 2\cdot 6, \ldots, 2^{s-4}\cdot 6, d_s),$$

wobei $d_s \leq 2^{s-3} \cdot 6$ *ist. Die Ungleichung ist komponentenweise zu interpretieren.*

Beweis. Nach Korollar 2.1.9 ist $\dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) \geq 2$. Per Definition ist $\mathfrak{n}^{(1)} = \mathfrak{n}^2$. Nach Korollar 2.1.8 folgt $[\mathfrak{n}^j, \mathfrak{n}^j] \leq \mathfrak{n}^{2j+1}$ für $j \geq 2$, woraus dann die Behauptung per Induktion folgt. □

Die folgende Verallgemeinerung ist nun offensichtlich.

3.2.4 Satz
Sei $\mathfrak{n}$ *eine* filiform *Lie-Algebra,* $\dim \mathfrak{n} \geq 2$. *Weiter sei* $\mathfrak{n}^{(2)} \leq \mathfrak{n}^{2+a+b}$ $(a \geq 2,\ b \geq 1)$ *und* $[\mathfrak{n}^j, \mathfrak{n}^j] \leq \mathfrak{n}^{2j+b}$ *für* $j \geq 2$. *Dann gilt für die Dimensionen der Kommutatorfaktoren* $\mathfrak{n}^{(i)}/\mathfrak{n}^{(i+1)}$ $(i \geq 0)$*:*

$$(\dim \mathfrak{n}^{(i)}/\mathfrak{n}^{(i+1)})_{0 \leq i \leq s-1} \geq (2, a+b, a+2b+2, \ldots, 2^{s-4} \cdot (a+2b+2), d_s),$$

wobei s *die Auflösbarkeitsstufe von* $\mathfrak{n}$ *ist und* $d_s \leq 2^{s-3} \cdot (a+2b+2)$.

3.2.5 Definition ($a+b$-auflösbar, $a+b$-pro-auflösbar)
Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \geq 2$ und $b \geq 1$.

- Eine *filiform* Lie-Algebra $\mathfrak{n}$, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, heißt $a+b$-*auflösbar*, wenn

  $$(\dim \mathfrak{n}^{(i)}/\mathfrak{n}^{(i+1)})_{0 \leq i \leq s-1} = (2, a+b, a+2b+2, \ldots, 2^{s-4} \cdot (a+2b+2), d_s)$$

  gilt, wobei s die Auflösbarkeitsstufe von $\mathfrak{n}$ ist und $d_s \leq 2^{s-3} \cdot (a+2b+2)$.

- Eine *pro-nilpotente* Lie-Algebra heißt $a+b$-*pro-auflösbar*, wenn sie inverser Limes von $a+b$-auflösbaren filiform Lie-Algebren ist.

3.2.6 Bemerkung

- Unter den nilpotenten Lie-Algebren sind die filiform Algebren diejenigen, die „am weitesten davon entfernt“ sind, abelsch zu sein. Wie weit aber eine jede filiform Algebra vom Abelschsein entfernt ist, läßt sich mit dem Begriff der $a+b$-Auflösbarkeit bestimmen: Eine $2+1$-auflösbare Algebra ist in diesem Sinne am wenigsten abelsch.

- Ist $\mathfrak{n}$ eine $a+b$-pro-auflösbare Lie-Algebra, dann ist $\dim(\mathfrak{n}^{(1)}/\mathfrak{n}^{(2)}) = a+b$. Man beachte trotzdem:

- Eine $a+b$-pro-auflösbare Lie-Algebra ist genau dann $c+d$-pro-auflösbar, wenn $a = c$ und $b = d$ sind.

- Die *Nottingham-Algebra*, die wir im folgenden Unterabschnitt kennenlernen werden, ist eine $2+2$-pro-auflösbare Algebra.

- Im Unterabschnitt 3.2.3 werden wir u.a. $2+1$-auflösbare Algebren behandeln.

Der Graduierungsbegriff spielt in dieser Arbeit eine Hauptrolle. Bei filiform Lie-Algebren kommen aufgrund des folgenden Lemmas nur die $\mathfrak{not}$-Graduierung und nil-Graduierung in Frage.

3.2.7 Lemma
Sei $\mathfrak{n}$ eine filiform Algebra, dann ist $\mathfrak{n}$ auf genau zwei Weisen $\mathbb{N}$-filtriert, je nachdem ob $\dim \mathfrak{n}_{(1)}/\mathfrak{n}_{(2)} = 1$ *oder* $\dim \mathfrak{n}_{(1)}/\mathfrak{n}_{(2)} = 2$ *ist.*

Beweis. Wegen Lemma 2.1.12 sind die nil-Filtrierung und $\mathfrak{not}$-Filtrierung die einzigen zulässigen $\mathbb{N}$-Filtrierung einer Filiform Lie-Algebra. □

Die dazu gehörigen Graduierungen werden wir in den folgenden zwei Unterabschnitten behandeln.

3.2.2 $\mathfrak{not}$-Graduierung

Die Nilradikale, die im Satz 3.2.1 vorkamen, hatten nach Voraussetzung die Stufe 2. Eine pro-endlich-dimensionale Erweiterung führt also zu *auflösbaren* pronilpotenten Lie-Algebren, und besitzt deshalb *keine* für uns interessante pronilpotente Struktur. Die Nottingham-Algebra, die Gegenstand dieses Unterabschnittes ist, hat dagegen eine reiche pro-nilpotente Struktur: sie ist $2+2$-proauflösbar. Sie ist auf eine besondere Weise graduiert und ist dadurch auch charakterisierbar (vgl. Satz 3.2.21).

3.2.8 Definition (Nottingham-Algebren)
Für $n \geq 2$ definiere die n-dimensionale *Nottingham-Algebra*

$$\mathfrak{not}_n := \langle e_1, \ldots, e_n | \; [e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}, \; e_m := 0 \text{ für } m > n \rangle.$$

Diese endlich-dimensionalen Algebren sind genau die echten Faktoralgebren der ∞-dimensionalen *Nottingham-Algebra*

$$\mathfrak{not} = \mathfrak{not}_\infty := \langle e_1, e_2 | \; e_{i+1} := \frac{1}{i-1}[e_1, e_i] \; (i \geq 2), \; [e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j} \rangle$$

nach ihren Potenzen, d.h. $\mathfrak{not}_n \cong \mathfrak{not}/\mathfrak{not}^n$ $(n \geq 2)$.

3.2.9 Bemerkung

- Die n-te Nottingham-Algebra $\mathfrak{not}_n$ ist eine filiform Lie-Algebra der Stufe $s = \lceil \log_2 n \rceil$. Sie ist $2+2$-auflösbar.

- Die Nottingham-Algebra ist pro-nilpotent von Koklasse 1:

$$(\dim \mathfrak{not}^i/\mathfrak{not}^{i+1})_{i \geq 1} = (2, 1, 1, \ldots).$$

- Die Nottingham-Algebra ist $2+2$-pro-auflösbar:

$$(\dim \mathfrak{not}^{(i)}/\mathfrak{not}^{(i+1)})_{i \geq 0} = (2, 4, 8, \ldots, 2^{i+1}, \ldots).$$

- Eine Lie-Algebra $\mathfrak{n}$ ist genau dann $\mathfrak{not}$-graduiert, wenn sie eine Zerlegung[6] $\mathfrak{n} = \bigoplus_{i=1}^{\dim \mathfrak{n}} \mathfrak{n}_i$ in 1-dimensionale Unterräume mit $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \leq \mathfrak{n}_{i+j}$ gestattet. Äquivalent ist die Existenz einer Basis $(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots)$ mit

$$[X_i, X_j] = \alpha_{i,j}^{i+j} X_{i+j}.$$

Ausgedrückt in den Strukturkonstanten $\alpha_{i,j}^k$ mit $[X_i, X_j] = \sum_k \alpha_{i,j}^k X_k$ heißt das: $\alpha_{i,j}^k = 0$ für $k \neq i + j$. Definiere $\alpha_{i,j} := \alpha_{i,j}^{i+j}$.

- Die Nottingham-Algebren sind per Definition $\mathfrak{not}$-graduiert. Daher auch die Bezeichnung „$\mathfrak{not}$-filtriert" bzw. „$\mathfrak{not}$-graduiert".

- Die Nottingham-Algebren sind *nicht* nil-graduiert. $\mathbf{gr}(\mathfrak{not}_n)$ und $\mathbf{gr}(\mathfrak{not})$ sind nach Bemerkung 2.1.15 ebenfalls Koklasse 1 Lie-Algebren. Deren Stufe ist aber 2.

3.2.10 Satz
Die Nottingham-Algebra $\mathfrak{not}$ ist endlich präsentierbar. Mit $(i-1)e_{i+1} := [e_1, e_i]$ gilt:

$$\mathfrak{not} \cong \langle e_1, e_2 | \ [e_2, e_3] = e_5, \ [e_2, e_5] = 3e_7 \rangle.$$

Dieser Satz ist ein Spezialfall eines allgemeineren Sachverhalts, den wir in Satz 3.2.13 formulieren werden.

3.2.11 Bemerkung

- V.P. Gerdt[7] und V.V. Kornyak[8] haben mit Hilfe ihrer Software [GK] diese Präsentation nachgeprüft.

- Über endlichen Körpern definiert man die Nottingham-Algebra als positiven Anteil der Loop-Algebra der ersten Witt-Algebra W_1. A. Caranti hat in [Car] ein Resultat von B.H. Neumann benutzt, um zu zeigen, daß über endlichen Körpern die Nottingham-Algebra nicht endlich-präsentierbar ist.

3.2.12 Lemma (Bratzlavsky)
$\mathfrak{n}$ ist genau dann eine filiform Lie-Algebra, wenn eine Basis $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ existiert, mit $[X_1, X_i] = X_{i+1}$ $(i \geq 2)$. Dabei ist $X_{n+1} = 0$ zu setzen.

Ab jetzt setzen wir bei Koklasse 1 Lie-Algebren eine Jordan-Basis voraus. Die Basiselemente sind also durch die Rekursionsformel $X_{i+1} := [X_1, X_i]$ definiert. Die Strukturkonstanten sind bezüglich dieser Basis auszurechnen. Insbesondere gilt: $\alpha_{1,i} = 1$ für alle $i \geq 2$.

Der folgende Satz ist lediglich eine Vorbereitung für das Hauptresultat dieses Unterabschnittes.

[6] $\dim \mathfrak{n} = \infty$ ist miteingeschlossen.
[7] Email: gerdt@jinr.dubna.su
[8] Email: kornyak@lcta3.jinr.dubna.su

3.2.13 Satz
Sei $\mathfrak{n}$ eine pro-nilpotente $\mathfrak{not}$-graduierte Koklasse 1 Lie-Algebra. Sei zusätzlich

$$0 \neq \Delta_j := \alpha_{2,3} + \alpha_{2,j-3} + \alpha_{3,j-3}, \quad \textit{für } j \geq 9,\ j \textit{ ungerade.} \tag{3.1}$$

Ist $\alpha_{2,5} \neq 3\alpha_{2,3}$, so ist $\mathfrak{n}$ durch $(\alpha_{2,3}, \alpha_{2,5})$, sonst durch $(\alpha_{2,3}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,7})$ eindeutig festgelegt. Ist $\Delta_j = 0$ für ein ungerades *$j \geq 9$, so muß man $\alpha_{2,j}$ hinzunehmen.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß die Kenntnis der Strukturkonstanten der Form $\alpha_{2,k}$ ausreicht, um die restlichen auszurechnen. Dies folgt unmittelbar aus der folgenden Rekursionsformel

$$[X_i, X_j] + [X_{i+1}, X_{j-1}] = \alpha_{i,j-1} X_{i+j}, \tag{3.2}$$

die man per Induktion nach $i+j$ zeigt. D.h. man nehme an: $\alpha_{k,l}$ sei für $k+l < i+j$ bekannt. Man nutze außerdem $\alpha_{1,n} = 1$ für alle $n \geq 2$ aus:

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= [X_i, [X_1, X_{j-1}]] \\ &= [[X_i, X_1], X_{j-1}] + [X_1, [X_i, X_{j-1}]] \\ &= -[X_{i+1}, X_{j-1}] + \alpha_{i,j-1} X_{i+j}. \end{aligned}$$

Unterteilt man die Strukturkonstanten in Klassen $C_k := \{\alpha_{i,j} |\ i + j = k\}$, so besagt die Rekursionsformel (3.2), daß *ein* Element der Klasse ausreicht, um die restlichen auszurechnen. Als zweite Folgerung beweisen wir, daß C_k (k gerade) durch C_{k-1} eindeutig bestimmt ist. Es gilt nämlich für gerades k:

$$C_k \ni \alpha_{\frac{k-2}{2}, \frac{k+2}{2}} = \alpha_{\frac{k-2}{2}, \frac{k}{2}} \in C_{k-1}.$$

Ab jetzt betrachten wir nur noch $\alpha_{2,j}$, j ungerade, $j \geq 7$. Man setze für (i, j) sukzessiv $(2, j), (3, j-1), (4, j-2)$ in (3.2) ein und erhalte die 3 Gleichungen:

$$\begin{array}{ccccccccc} [X_2, X_j] & + & [X_3, X_{j-1}] & + & 0 & + & 0 & = & \alpha_{2,j-1} X_{2+j} \\ 0 & + & [X_3, X_{j-1}] & + & [X_4, X_{j-2}] & + & 0 & = & \alpha_{3,j-2} X_{2+j} \\ 0 & + & 0 & + & [X_4, X_{j-2}] & + & [X_5, X_{j-3}] & = & \alpha_{4,j-3} X_{2+j} \end{array} \tag{3.3}$$

Als vierte Gleichung nehme man

$$-\alpha_{3,j-3}[X_2, X_j] + \alpha_{2,j-3}[X_3, X_{j-1}] + 0 + \alpha_{2,3}[X_5, X_{j-3}] = 0, \tag{3.4}$$

die man erhält, indem man $\alpha_{2,3} X_5$ durch $[X_2, X_3]$ ersetzt:

$$\begin{aligned} \alpha_{2,3}[X_5, X_{j-3}] &= [[X_2, X_3], X_{j-3}] \\ &= [[X_2, X_{j-3}], X_3] + [X_2, [X_3, X_{j-3}]] \\ &= -\alpha_{2,j-3}[X_3, X_{j-1}] + \alpha_{3,j-3}[X_2, X_j]. \end{aligned}$$

$[X_2, X_j]$ ist als Vielfaches von X_{2+j} eindeutig bestimmt, wenn $[X_2, X_j]$ im System (3.3,3.4) eine eindeutige Lösung hat. Dabei werden die vier Kommutatoren $[X_2, X_j]$, $[X_3, X_{j-1}]$, $[X_4, X_{j-2}]$, $[X_5, X_{j-3}]$ wie Unbekannte[9] behandelt. Für $j \geq 9$ ist die Eindeutigkeit von $[X_2, X_j]$ bzw. von $\alpha_{2,j}$ zur eindeutigen Lösbarkeit des obigen 4×4 linearen inhomogenen Gleichungssystems äquivalent. Die Systemmatrix

$$M_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ -\alpha_{3,j-3} & \alpha_{2,j-3} & \cdot & \alpha_{2,3} \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\Delta_j := \det M_j$ nicht verschwindet. Dies ist aber genau die Bedingung (3.1). Der Fall $j < 9$, j ungerade, $j \geq 7$, d.h. $j = 7$ ist noch zu behandeln. Für $j = 7$ entartet das System zu einem 3×3 linearen inhomogenen Gleichungssystem, dessen Systemmatrix

$$\tilde{M}_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 \\ -\alpha_{3,4} & \alpha_{2,4} & -\alpha_{2,3} \end{pmatrix}$$

ist. Ihre Determinante ist $\tilde{\Delta}_7 = -(\alpha_{3,4} + \alpha_{2,4} + \alpha_{2,3})$. Nutzt man $\alpha_{2,4} = \alpha_{2,3}$ und $\alpha_{3,4} = \alpha_{2,3} - \alpha_{2,5}$ aus, so erhält man $\tilde{\Delta}_7 = \alpha_{2,5} - 3\alpha_{2,3}$. $\alpha_{2,7}$ ist also genau dann eindeutig bestimmbar, wenn $\alpha_{2,5} \neq 3\alpha_{2,3}$. □

3.2.14 Bemerkung

Für $j = 5$ entartet das System zur ersten Gleichung, wonach $\alpha_{2,5}$ nicht eindeutig zu bestimmen ist.

3.2.15 Korollar

Seien $j \geq 5$ eine ungerade Zahl und $\mathfrak{n}$ eine j-dimensionale $\mathfrak{not}$-graduierte filiform Lie-Algebra. Besitzt $\mathfrak{n}$ eine $j+1$-dimensionale $\mathfrak{not}$-graduierte filiform Erweiterung[10], so ist diese Erweiterung eindeutig.

3.2.16 Korollar

Eine $\mathfrak{not}$-graduierte Koklasse 1 Lie-Algebra $\mathfrak{n}$, die den Bedingungen (3.1) und $\alpha_{2,5} \neq 3\alpha_{2,3}$ genügt, ist bereits durch $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^7$ eindeutig festgelegt.

---

[9] Erst für $j \geq 9$, darf man sie als 4 „Unbekannte“ ansehen. Für $j < 9$ besitzen sie nicht-triviale Abhängigkeiten.

[10] Hiermit ist eine zentrale Erweiterung gemeint.

3.2.17 Bemerkung

1. Für die Nottingham-Algebra gilt für die Strukturkonstanten, ausgerechnet in der Jordan-Basis:

$$\alpha_{i,j} = \frac{(i-2)!(j-2)!}{(i+j-2)!}(j-i).$$

Insbesondere ist $\alpha_{2,3} = \frac{1}{6}$, $\alpha_{2,j-3} = \frac{j-5}{(j-3)(j-4)}$, $\alpha_{3,j-3} = \frac{j-6}{(j-2)(j-3)(j-4)}$. Für $j \geq 9$ sind also alle drei Summanden von (3.1) positiv und somit auch Δ_j. Zusätzlich ist $\alpha_{2,5} = \frac{3}{20} \neq 3\frac{1}{6} = 3\alpha_{2,3}$. Satz 3.2.10 ist bewiesen.

2. Die pro-nilpotente $\mathfrak{not}$-graduierte Koklasse 1 Lie-Algebra[11]

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^{[\beta]} := \langle Z_i |\ & i \in \mathbb{N},\ [Z_1, Z_i] = Z_{i+1}\ (i \geq 2), \\ & [Z_2, Z_i] = \beta Z_{2+i}\ (i \geq 3),\ [Z_i, Z_j] = 0\ (i, j \geq 3)\rangle\end{aligned}$$

erfüllt für $\beta \neq 0$ die Voraussetzungen des Satzes. Da aber nach [AnGo] $\mathfrak{a}^{[\beta]}/(\mathfrak{a}^{[\beta]})^7 \cong \mathfrak{a}^{[\beta']}/(\mathfrak{a}^{[\beta']})^7$ für $\beta, \beta' \neq 0$, folgt aus dem Satz, daß $\mathfrak{a}^{[\beta]} \cong \mathfrak{a}^{[\beta']}$ für $\beta, \beta' \neq 0$. O.B.d.A. kann man also $\beta = 1$ setzen.

3.2.18 Satz

Eine 7-dimensionale Koklasse 1 Lie-Algebra $\mathfrak{n}$ ist genau dann $\mathfrak{not}$-graduiert, wenn sie zu einer der folgenden paarweise nicht isomorphen Algebren isomorph ist:

$$\mathfrak{n}_7^{[\rho]}\ (\rho \in (\mathbb{K} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}),\ \mathfrak{a}^{[1]}/(\mathfrak{a}^{[1]})^7,\ \textit{oder}\ \mathfrak{a}^{[0]}/(\mathfrak{a}^{[0]})^7,$$

mit[12]

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}_7^{[\rho]} := \langle X_1, \ldots, X_7 |\ & [X_1, X_i] = X_{i+1}\ (1 \leq i \leq 6), \\ & [X_2, X_3] = \frac{1}{1-\rho}X_5,\ [X_2, X_4] = \frac{1}{1-\rho}X_6, \\ & [X_2, X_5] = \frac{\rho}{1-\rho}X_7,\ [X_3, X_4] = X_7\rangle.\end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt per Inspektion der 7-dimensionalen filiform Algebren bei [AnGo], Seite 522f. Die zweite und dritte Algebra stimmen jeweils mit der zweiten und achten Algebra dort überein. Die erste Familie stimmt mit der ersten Familie dort überein. □

3.2.19 Korollar

Die 7-dimensionalen $\mathfrak{not}$-graduierten filiform Lie-Algebren stehen in Bijektion zu $(\mathbb{K} \times \mathbb{K})/\mathbb{K}^*$.

---

[11] Der Name $\mathfrak{a}$ steht für abelsches Kommutatorideal.

[12] Hier benutzen wir die übliche Konvention, daß man $[X_i, X_j]$ nur für $i < j$ angibt und daß man die sonstigen nicht vorkommenden Kommutatoren gleich 0 setzt.

3.2.20 Bemerkung
Die Bedeutung des Satzes 3.2.13 liegt darin, daß man ihn zur Klassifikation der $\mathfrak{not}$-graduierten Koklasse 1 Lie-Algebren benutzen kann. Dabei mache man sich Satz 3.2.18 zu Nutze.

3.2.21 Satz ($\frac{9}{10}$-Satz)
Klassifikation der $\mathfrak{not}$-graduierten Koklasse 1 Lie-Algebren (vgl. Abbildung 3.1, Seite 55):

Fall I) $(\alpha_{2,3}, \alpha_{2,5}) = (0,0)$*:*

(a) $\alpha_{2,j} = 0$ *für alle ungeraden* j*. Dann ist* $\mathfrak{n}$ *isomorph zu einer Faktoralgebra der* ∞*-dimensionalen Algebra* $\mathfrak{a}^{[0]}$*.*

(b) *Sei* j *die kleinste Zahl mit* $\alpha_{2,j} = \lambda \neq 0$*. Dann ist* j ungerade, $j \geq 7$ *und o.B.d.A.* $\lambda = 1$*.* $\mathfrak{n}$ *ist isomorph zu einer Faktoralgebra der* $j+4$*-dimensionalen filiform Algebra*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}^{[0,j]} := \mathfrak{a}^{[0,j,1]} \cong \mathfrak{a}^{[0,j,\lambda]} := \langle X_1, \ldots, X_{j+4} | \\
[X_1, X_i] &= X_{i+1} && (2 \leq i \leq j+3), \\
[X_k, X_l] &= 0 && (k, l \geq 2, k+l \leq j+1), \\
[X_k, X_l] &= \lambda(-1)^k \; X_{j+2} && (k+l = j+2), \\
[X_k, X_l] &= \lambda(-1)^l \; \tfrac{l-k}{2} X_{j+3} && (k+l = j+3), \\
[X_k, X_l] &= \lambda(-1)^l \; \tfrac{(k-2)(l-2)}{2} X_{j+4} && (k+l = j+4)\rangle.
\end{aligned}$$

Fall II) $(\alpha_{2,3}, \alpha_{2,5}) \neq (0,0)$*:*

(a) $\alpha_{2,3} = \alpha_{2,5} = \lambda \neq 0$*. Dann ist o.B.d.A.* $\lambda = 1$ *und* $\mathfrak{n}$ *isomorph zu einer Faktoralgebra der* ∞*-dimensionalen Algebra* $\widetilde{\mathfrak{n}_7^{[1]}} := \mathfrak{a}^{[1]}$*.*

(b) $\alpha_{2,3} \neq \alpha_{2,5}$*. Definiere* $\rho := \frac{\alpha_{2,5}}{\alpha_{2,3}}$*.*

i. $\rho = 3$ *(*$\Longleftrightarrow \quad \Delta_7 = 0$*). Dann ist* $\mathfrak{n}$ *eine Faktoralgebra der 8-dimensionalen Algebra, die durch*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{n}_7^{[3]}} := \langle X_1, X_2 | \\
[X_2, (\mathrm{ad}X_1)X_2] &= -\tfrac{1}{2} \; (\mathrm{ad}X_1)^3 X_2, \\
[X_2, (\mathrm{ad}X_1)^3 X_2] &= -\tfrac{3}{2} \; (\mathrm{ad}X_1)^5 X_2, \\
\mathrm{ad}(X_1)^7(X_2) &= 0 \; \rangle
\end{aligned}$$

präsentiert ist.

ii. $\rho \in \{0,2\}$ *(*$\Longleftrightarrow$ $\Delta_9 = 0$*). Dann ist* $\mathfrak{n}$ *isomorph zu einer Faktoralgebra der 10-dimensionalen Algebra, die durch*

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{n}_7^{[\rho]}} := \langle X_1, X_2 | & \\ [X_2, (\mathrm{ad}X_1)X_2] &= \tfrac{1}{1-\rho} \quad (\mathrm{ad}X_1)^3 X_2, \\ [X_2, (\mathrm{ad}X_1)^3 X_2] &= \tfrac{\rho}{1-\rho} \quad (\mathrm{ad}X_1)^5 X_2, \\ \mathrm{ad}(X_1)^9 X_2 &= \quad 0 \ \rangle \end{aligned}$$

präsentiert ist.

iii. $\rho = \frac{9}{10}$*. Dann ist* $\mathfrak{n}$ *isomorph zu einer Faktoralgebra der* ∞*-dimensionalen Nottingham-Algebra*

$$\begin{aligned} \mathfrak{not} \cong \widetilde{\mathfrak{n}_7^{[\frac{9}{10}]}} := \langle X_1, X_2 | & \\ [X_2, (\mathrm{ad}X_1)X_2] &= 10 \quad (\mathrm{ad}X_1)^3 X_2, \\ [X_2, (\mathrm{ad}X_1)^3 X_2] &= 9 \quad (\mathrm{ad}X_1)^5 X_2 \rangle. \end{aligned}$$

iv. $\rho \notin \{3, 0, 2, \frac{9}{10}\}$*. Dann ist* $\mathfrak{n}$ *isomorph zu einer Faktoralgebra der 11-dimensionalen Algebra, die durch*

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{n}_7^{[\rho]}} := \langle X_1, X_2 | & \\ [X_2, (\mathrm{ad}X_1)X_2] &= \tfrac{1}{1-\rho} \quad (\mathrm{ad}X_1)^3 X_2 \\ [X_2, (\mathrm{ad}X_1)^3 X_2] &= \tfrac{\rho}{1-\rho} \quad (\mathrm{ad}X_1)^5 X_2, \\ \mathrm{ad}(X_1)^{10} X_2 &= \quad 0 \ \rangle \end{aligned}$$

präsentiert ist. Dabei ist $\frac{1}{1-\infty} := 0$ *und* $\frac{\infty}{1-\infty} := -1$.

Beweis. Zuerst betrachten wir Fall I. (a) ist trivial. Bei (b) verifiziere man durch Nachprüfen der Jacobi-Identität, daß $\mathfrak{a}^{[0,j]}$ eine Lie-Algebra ist. Offenbar ist $\alpha_{2,3} = \alpha_{2,5} = 0$. Für $\lambda \neq 0$ ist $\mathfrak{a}^{[0,j,1]} \to \mathfrak{a}^{[0,j,\lambda]};\ X_i \mapsto \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X_i\ (i \geq 2)$ ein Isomorphismus. Die Eindeutigkeit dieser Algebra folgt aus $\Delta_{j+2} = \alpha_{3,j-1} = -\alpha_{2,j} = -\lambda \neq 0$. Wäre $X_{j+5} \neq 0$, so folgte, daß $J(X_3, X_4, X_{j-2}) \neq 0$ ist. Es gelte dann

$$\begin{aligned} J(X_3, X_4, X_{j-2}) &= (\underbrace{\alpha_{4,j-2}}_{=\alpha_{2,j}=\lambda\neq 0} \alpha_{3,j+2} + \underbrace{\alpha_{j-2,3}}_{=0} \alpha_{4,j+1} + \underbrace{\alpha_{3,4}}_{=0} \alpha_{j-2,7}) X_{j+5} \\ &= \lambda \alpha_{3,j+2} X_{j+5}. \end{aligned}$$

Es bleibt also $\alpha_{3,j+2} \neq 0$ nachzuweisen. Nach Satz 3.2.13 gilt

$$\alpha_{3,j+2} = \alpha_{3,j+1} - \alpha_{4,j} + \alpha_{5,j-1} - \cdots + (-1)^{\frac{j+5}{2}} \alpha_{\frac{j+3}{2}, \frac{j+5}{2}} - (-1)^{\frac{j+5}{2}} \underbrace{\alpha_{\frac{j+5}{2}, \frac{j+5}{2}}}_{=0},$$

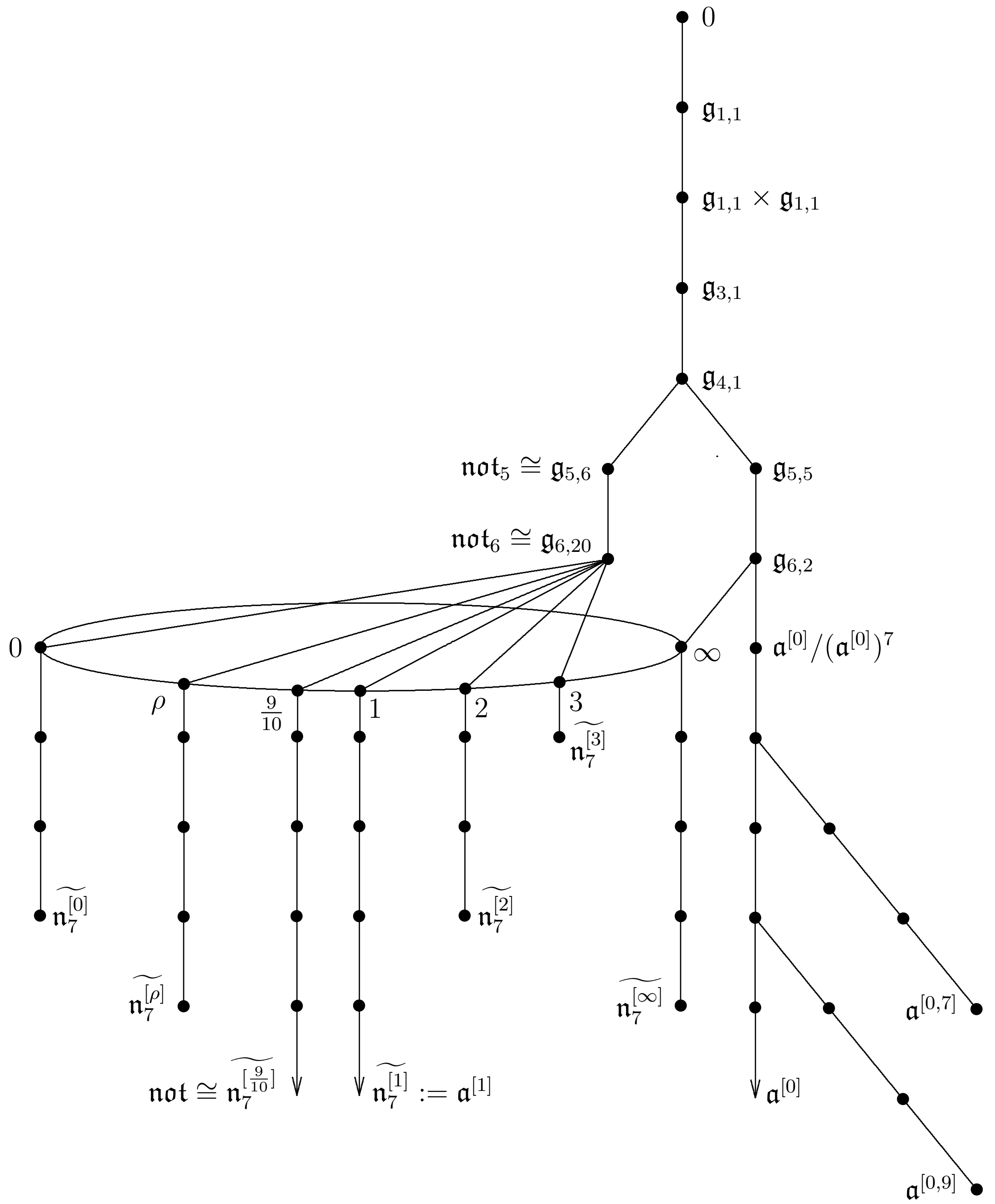

Abbildung 3.1: $\mathfrak{not}$-graduierte Koklasse 1 Algebren

was eine Summe positiver Zahlen und somit $\neq 0$ ist. $j+4$ ist somit die größtmögliche Dimension.
Nun behandeln wir Fall II. (a) ist wieder trivial. Bei (b) setze man $\alpha_{2,3} = \frac{1}{1-\rho}$ und $\alpha_{2,5} = \frac{\rho}{1-\rho}$. Dann ist $\rho = \frac{\alpha_{2,5}}{\alpha_{2,3}}$. Für $\rho = 3$ ist $\Delta_7 = 0$. Deshalb ist $\alpha_{2,7}$ nicht durch $\alpha_{2,3}$ und $\alpha_{2,5}$ zu bestimmen. Wäre $X_9 \neq 0$, so folgte $J(X_2, X_3, X_4) = -3X_9 \neq 0$ für jede Wahl von $\alpha_{2,7}$. Die maximale Dimension einer solchen Algebra ist dann 8. Diese Algebra bezeichnen wir mit $\widetilde{\mathfrak{n}_7^{[3]}}$. Man verifiziere die Gültigkeit der Jacobi-Identität bei der im Satz vorgegebenen Algebra. Für die restlichen Fälle ist $\alpha_{2,5} \neq 3\alpha_{2,3}$ und $\alpha_{2,7}$ ist durch $\alpha_{2,3}$ und $\alpha_{2,5}$ eindeutig bestimmt. Für $\rho = 0$ und $\rho = 2$ ist $\Delta_9 = 0$. Deshalb ist $\alpha_{2,9}$ nicht durch $\alpha_{2,3}$ und $\alpha_{2,5}$ eindeutig zu bestimmen. Wäre $X_{11} \neq 0$, so folgte für $\rho = 0$ (bzw. $\rho = 2$) $J(X_2, X_3, X_6) = -2X_{11} \neq 0$ (bzw. $J(X_2, X_3, X_6) = -66X_{11} \neq 0$) für jede Wahl von von $\alpha_{2,9}$. Die maximale Dimension einer solchen Algebra ist dann 10. Diese Algebren bezeichnen wir mit $\widetilde{\mathfrak{n}_7^{[\rho]}}$. Man verifiziere die Gültigkeit der Jacobi-Identität. Für die restlichen Fälle ist $\rho \notin \{0, 2, 3\}$ und $\alpha_{2,7}$ bzw. $\alpha_{2,9}$ sind durch $\alpha_{2,3}$ und $\alpha_{2,5}$ eindeutig festgelegt. Ist $X_{12} \neq 0$, so folgt[13]

$$\begin{aligned} J(X_3, X_4, X_5) &= 90\frac{(\alpha_{2,5} - \frac{9}{10}\alpha_{2,3})(\alpha_{2,5} - \alpha_{2,3})^5}{\alpha_{2,5}(\alpha_{2,5} - 2\alpha_{2,3})(\alpha_{2,5} - 3\alpha_{2,3})^2} X_{12} \\ &= 90\frac{(\rho - \frac{9}{10})(\rho - 1)^3}{\rho(\rho - 2)(\rho - 3)^2} X_{12} \neq 0. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist genau dann Null wenn $\rho = \frac{9}{10}$. Da die $\mathfrak{not}$-graduierte Koklasse 1 Nottingham-Algebra bis jetzt noch nicht vorgekommen ist, gilt: $\rho = \frac{9}{10}$ muß $\mathfrak{not}$ entsprechen. $\widetilde{\mathfrak{n}_7^{[\frac{9}{10}]}} := \mathfrak{not}$ ist unendlich dimensional. □

3.2.22 Bemerkung

- Die Bezeichnungen $\mathfrak{g}_{i,j}$ (z.B. $\mathfrak{g}_{6,20}$) in dem Diagramm 3.1, stammen aus [OnVi], Seite 210f. Die gleichen Bezeichnungen findet man ebenfalls in [Magn], Seite 122ff.

- Satz 3.2.21 demonstriert, inwieweit die Nottingham-Algebra durch ihre besondere Graduierung charakterisiert ist.

3.2.3 nil-Graduierung

Im vorigen Unterabschnitt haben wir eine $2+2$-pro-auflösbare Algebra kennengelernt. Eine unendlich-dimensionale $2+1$-pro-auflösbare Algebra gibt es dagegen nicht:

[13] $\rho = 0, 1, 2, 3$ sind bereits ausgeschlossen.

3.2.23 Satz
Eine $2+1$-auflösbare Lie-Algebra ist höchstens 6-dimensional. Es gibt genau zwei nicht isomorphe $2+1$-auflösbare Algebren[14] *der Dimension 6:*

$$\mathfrak{g}_{6,21} := \langle Y_1, \ldots, Y_7 | \; [Y_1, Y_i] = Y_{i+1} \; (1 \leq i \leq 5), \\ [Y_2, Y_3] = Y_4, \; [Y_2, Y_4] = Y_5, \; [Y_3, Y_4] = Y_6 \rangle,$$

oder

$$\mathfrak{g}_{6,22} := \langle Y_1, \ldots, Y_7 | \; [Y_1, Y_i] = Y_{i+1} \; (1 \leq i \leq 5), \\ [Y_2, Y_3] = Y_4 - Y_5 + Y_6, \; [Y_2, Y_4] = Y_5 - Y_6, \; [Y_3, Y_4] = Y_6 \rangle.$$

BEWEIS. Dies folgt per Inspektion der 7-dimensionalen filiform Lie-Algebren in [AnGo]. □

3.2.24 Bemerkung

- Für $\mathfrak{g}_{6,21}$ gelangt man von der Basis-Darstellung in [OnVi] zu unserer, indem man $Y_1 := X_1 + X_2$ und $Y_i := X_i$ für alle $2 \leq i \leq 6$ definiert. Für $\mathfrak{g}_{6,22}$ setze man $Y_1 := X_1 + X_2$, $Y_4 := X_4 + X_5$, $Y_5 := X_5 + X_6$ und $Y_i := X_i$ sonst.

- Diese beiden 6-dimensionalen Algebren fehlen in [AnGo].

- In unserer Basis-Darstellung sieht man sofort $\mathbf{gr}_{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}_{6,22}) \cong \mathfrak{g}_{6,21}$

Vollkommen analog zu Satz 3.2.13 läßt sich das folgende Lemma beweisen.

3.2.25 Lemma
Sei $\mathfrak{n}$ eine pro-nilpotente nil-graduierte Koklasse 1 Lie-Algebra. Sei zusätzlich

$$0 \neq \Delta_j := \alpha_{2,3} - \alpha_{2,j-2} - \alpha_{3,j-2}, \quad \text{für } j \geq 7, \; j \text{ ungerade.} \tag{3.5}$$

Dann ist $\mathfrak{n}$ durch $(\alpha_{2,3}, \alpha_{2,5})$ eindeutig festgelegt. Ist $\Delta_j = 0$ für ein ungerades *$j \geq 7$, so muß man $\alpha_{2,j}$ hinzunehmen.*

Das Analogon zu Korollar 3.2.15 ist:

3.2.26 Korollar
Seien $j \geq 5$ eine ungerade Zahl und $\mathfrak{n}$ eine $j-1$-dimensionale nil-graduierte filiform Lie-Algebra. Besitzt $\mathfrak{n}$ eine j-dimensionale nil-graduierte filiform Erweiterung, so ist diese Erweiterung eindeutig.

[14] Beide sind filiform Algebren.

3.2.27 Satz
Sei $\mathfrak{n}$ eine nil-graduierte Koklasse 1 Algebra, dann ist $\mathfrak{n}$ isomorph zu einer Faktoralgebra der ∞-dimensionalen $\mathfrak{a}^{[0]}$ oder zur $j+1$-dimensionalen filiform Algebra[15]

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}^{[j]} := \mathfrak{m}^{[j,1,0]} \cong \mathfrak{m}^{[j,\gamma,\lambda]} := \langle X_1, \ldots, X_{j+1} | \\
[X_1, X_i] &= X_{i+1} & (2 \leq i \leq j), \\
[X_2, X_i] &= \gamma X_{i+1} & (\gamma \neq 0,\ 3 \leq i \leq j-1), \\
[X_k, X_l] &= 0 & (k, l \geq 3, k+l \leq j+1), \\
[X_2, X_j] &= \lambda X_{j+1} & (\lambda \neq \gamma), \\
[X_k, X_l] &= (-1)^l(\gamma - \lambda)\ X_{j+1} & (k, l \geq 3, k+l = j+2)\rangle,
\end{aligned}$$

wobei j eine ungerade *Zahl ist. Vgl. Abbildung 3.2, Seite 59.*

Beweis. Wir gehen von einer Jordan-Basis aus: $[X_1, X_i] = X_{i+1}$, $i \geq 2$. Die Nil-Graduierung ist zur Bedingung $[X_i, X_j] = \alpha_{i,j} X_{i+j-1}$ für $i, j \geq 2$ äquivalent. Hier ist also $\alpha_{i,j} := \alpha_{i,j}^{i+j-1}$. Analog zum vorigen Unterabschnitt zeigt man: $\alpha_{i,j} + \alpha_{i+1,j-1} = \alpha_{i,j-1}$. Sei nun j ungerade, $j \geq 5$. Dann hat $\mathfrak{a}^{[0]}/(\mathfrak{a}^{[0]})^{j-1}$ nach Korollar 3.2.26 genau eine j-dimensionale nil-graduierte filiform Erweiterung, nämlich $\mathfrak{a}^{[0]}/(\mathfrak{a}^{[0]})^j$. Sei $\mathfrak{n}$ eine $j+1$-dimensionale nil-graduierte filiform Erweiterung von $\mathfrak{a}^{[0]}/(\mathfrak{a}^{[0]})^j$, dann ist wegen $\Delta_j = 0$ (vgl. (3.5)) $\alpha_{2,j}$ frei wählbar und $\mathfrak{n} \cong \mathfrak{m}^{[j]}$ oder $\mathfrak{n} \cong \mathfrak{a}^{[0]}/(\mathfrak{a}^{[0]})^{j+1}$. Die Wohldefiniertheit von $\mathfrak{m}^{[j]}$ läßt sich mit dem Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{m}^{[j,\gamma,\lambda]} & \to & \mathfrak{m}^{[j,1,0]} =: \mathfrak{m}^{[j]} \\
X_1 & \mapsto & X_1 \\
X_2 & \mapsto & \lambda X_1 + (\gamma - \lambda) X_2 \\
X_i & \mapsto & (\gamma - \lambda) X_i \qquad (3 \leq i \leq j+1)
\end{array}$$

erledigen. Läßt man bei $\mathfrak{m}^{[j]}$ $\lambda = \gamma \neq 0$ zu, so erhält man eine $j+1$-dimensionale Lie-Algebra, die aber via

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{m}^{[j,\gamma,\gamma]} & \to & \mathfrak{a}^{[0]}/(\mathfrak{a}^{[0]})^{j+1} \\
X_1 & \mapsto & Z_1 - \dfrac{1}{2\gamma} Z_2 \\
X_2 & \mapsto & \gamma Z_1 + \dfrac{1}{2} Z_2 \\
X_i & \mapsto & Z_i \qquad (3 \leq i \leq j+1)
\end{array}$$

zu $\mathfrak{a}^{[0]}/(\mathfrak{a}^{[0]})^{j+1}$ isomorph ist. Insbesondere gilt also: $\mathfrak{m}^{[j]}/Z(\mathfrak{m}^{[j]}) \cong \mathfrak{a}^{[0]}/(\mathfrak{a}^{[0]})^j$. Die Behauptung des Satzes folgt aus der Tatsache, daß $\mathfrak{m}^{[j]}$ keine $j+2$-dimensionale

[15] Der Name $\mathfrak{m}$ steht für <u>m</u>eta-abelsches Kommutatorideal.

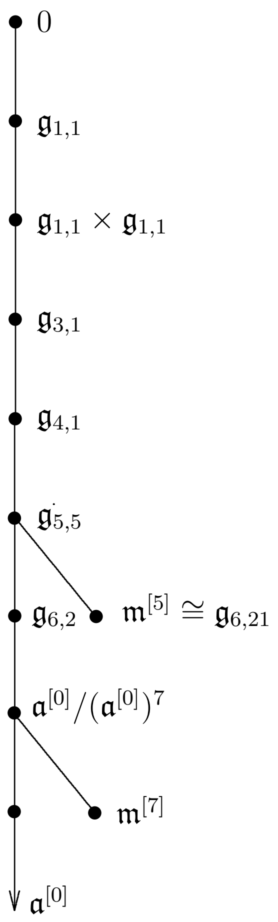

Abbildung 3.2: nil-graduierte Koklasse 1 Algebren

nil-graduierte filiform Erweiterung hat. Wäre $X_{j+2} \neq 0$, so folgte

$$\begin{aligned}
& [X_2,[X_3,X_{j-1}]] + [X_3,[X_{j-1},X_2]] + [X_{j-1},[X_2,X_3]] \\
= \;& (\underbrace{\alpha_{3,j-1}}_{\gamma-\lambda}\underbrace{\alpha_{2,j+1}}_{\lambda-\alpha_{3,j}} + \underbrace{\alpha_{j-1,2}}_{-\gamma}\alpha_{3,j} + \underbrace{\alpha_{2,3}}_{\gamma}\;\underbrace{\alpha_{4,j-1}}_{-(\gamma-\lambda-\alpha_{3,j})})X_{j+2} \\
= \;& -((\gamma-\lambda)^2 + (\gamma-\lambda)\alpha_{3,j})X_{j+2}.
\end{aligned}$$

Mit $\alpha_{3,j} = \frac{j-3}{2}(\gamma - \lambda)$ folgte schließlich

$$J(X_2, X_3, X_{j-1}) = -\frac{j-1}{2}\underbrace{(\gamma-\lambda)^2}_{\neq 0}X_{j+2} \neq 0.$$

Der Rest ist eine Induktion über ungerades $j \geq 5$, wobei man für die Induktionsverankerung ($j = 5$) die Klassifikation der 5-dimensionalen filiform Algebren heranzieht. □

3.3 Koklasse 0

In diesem Abschnitt benutzen wir die Loop-Algebren, um pro-nilpotente Koklasse 0 Lie-Algebren zu konstruieren. Alle Algebren sind komplex.

3.3.1 Definition ($L(\mathfrak{g},\sigma)^+$, $X_n^{(k)}(s_0,\dots,s_l)^+$)
Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie-Algebra und σ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$. Die Loop-Algebra $L(\mathfrak{g},\sigma) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} L_j^\sigma$ sei mit der natürlichen $\mathbb{Z}$-Graduierung ausgestattet. Die $\mathbb{N}$-graduierte Teilalgebra

$$L(\mathfrak{g},\sigma)^+ := \bigoplus_{j\geq 1} L_j^\sigma$$

nennen wir den *positiven Anteil der Loop-Algebra* $L(\mathfrak{g},\sigma)$. Ist X_n der Isomorphie-Typ von $\mathfrak{g}$, ν und $(k; s_0,\dots,s_l)$ wie im Satz 2.2.23, so schreiben wir

$$X_n^{(k)}(s_0,\dots,s_l)^+ = \bigoplus_{j\geq 1} L_j$$

anstelle von $L(\mathfrak{g},\sigma)^+$.

Mit Hilfe des folgenden Lemmas werden wir pro-nilpotente Koklasse 0 Lie-Algebren konstruieren.

3.3.2 Lemma
Sei $L = \bigoplus_{j\geq 0} L_j$ eine $\mathbb{N}_0$-graduierte Lie-Algebra. Die $\mathbb{N}$-graduierte Teilalgebra $L^+ := \bigoplus_{j\geq 1} L_j$ ist eine nil-graduierte *Lie-Algebra mit* L_0-cocl$(L^+) = 0$*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$\langle L_0, L_1\rangle_{\mathrm{Lie}} = L$;*

2. *für alle $j \in \mathbb{N}$ ist L_j einfach als L_0-Modul.*

Beweis. Die erste Bedingung ist wegen $[L_0, L_1] = L_1$ dazu äquivalent, daß L_1 die Teilalgebra L^+ erzeugt. Daraus folgt, daß $\bigoplus_{j\geq 2} L_j \leq (L^+)^2$ ist. Da aber die Operation von L_0 auf L^+ mit der Lie-Klammer verträglich ist, d.h. daß L_0 via Derivationen von L^+ operiert, folgt wegen der Irreduzibelität von L_1 als L_0-Modul, daß $\bigoplus_{j\geq 2} L_j = (L^+)^2$ bzw. $L^+/(L^+)^2 \cong L_1$ ist. Wegen $\langle L_1\rangle_{\mathrm{Lie}} = L^+$ und der vorliegenden Graduierung, wird L_m ($m \geq 2$) von allen Kommutatoren der Länge m von Elementen aus L_1 erzeugt, d.h. $L_m = \langle [L_k, L_l] \mid k+l = m,\ k, l \geq 1\rangle_{\mathbb{K}}$. Wir beweisen per Induktion nach m eine Verschärfung der letzten Aussage:

$$\langle [L_1, L_{m-1}]\rangle_{\mathbb{K}} = L_m. \tag{3.6}$$

Für $m = 2$ ist die Aussage trivial. Wir nehmen nun an, daß die Aussage für alle $k < m$ wahr ist. Für $[L_k, L_l]$ mit $k+l = m$ gilt wegen der Induktionsvoraussetzung und der Jacobi-Identität:

$$\begin{aligned}
[L_k, L_l] &\subset \langle [L_k, [L_1, L_{l-1}]]\rangle \\
&\subset \langle [[L_k, L_1], L_{l-1}]\rangle + \langle [L_1, [L_k, L_{l-1}]]\rangle \\
&\subset \langle [L_{k+1}, L_{l-1}]\rangle + \langle [L_1, L_{m-1}]\rangle \\
&\subset \langle [L_{k+2}, L_{l-2}]\rangle + \langle [L_1, L_{m-1}]\rangle \\
&\ \ \vdots \\
&\subset \langle [L_1, L_{m-1}]\rangle.
\end{aligned}$$

Daraus folgt (3.6). Wir haben also gezeigt, daß $(L^+)^m = \bigoplus_{j\geq m} L_j$ bzw.

$$(L^+)^m/(L^+)^{m+1} \cong L_m.$$

Da L_m einfach ist, folgt die Behauptung. □

3.3.3 Korollar
Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie-Algebra und σ ein Automorphismus der Ordnung m. Ist für alle $i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ $\mathfrak{g}_i^\sigma$ einfach als $\mathfrak{g}_0^\sigma$-Modul, so ist $L(\mathfrak{g}, \sigma)^+$ eine nil-graduierte *Lie-Algebra mit*

$$\mathfrak{g}_0^\sigma\text{-cocl}(L(\mathfrak{g}, \sigma)^+) = 0.$$

Beweis. Die erste Bedingung des Lemmas folgt aus dem nächsten Satz und die zweite aus der Definition von $L(\mathfrak{g}, \sigma) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} L_j^\sigma$ mit $L_j^\sigma := x^j \mathfrak{g}^\sigma_{j(\mathrm{mod}\ m)}$. □

Die reduktive Teilalgebra $\mathfrak{g}_0^\sigma$ ist genau dann einfach als $\mathfrak{g}_0^\sigma$-Modul, wenn sie als Lie-Algebra einfach ist. Dies stellt uns vor der Aufgabe, alle Automorphismen σ von $\mathfrak{g}$ (bis auf Konjugation) zu finden, die eine einfache Fixalgebra $\mathfrak{g}_0^\sigma$ haben. Dazu verfeinern[16] wir Satz 2.2.23.

[16] Der folgende Satz ist Theorem 5.15, Seite 510 in [Hel].

3.3.4 Satz (Kac **1969)**
Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe einfache Lie-Algebra vom Typ X_n und ν ein Automorphismus des Dynkin-Diagramms der Ordnung k ($k = 1, 2, 3$). Sei $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ die dazugehörige $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$-Graduierung. Sei l der Rang der einfachen Fixalgebra $\mathfrak{g}_0^\nu$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ ein Fundamentalsystem und $e_j = e_{\alpha_j}, h_j = h_{\alpha_j}, f_j = e_{-\alpha_j}$ ($1 \leq j \leq l$) ein kanonisches Erzeugendensystem von $\mathfrak{g}_0^\nu$. Sei $\widetilde{\alpha}_0$ das niedrigste Gewicht der Form $(\alpha_0, 1)$ und sei $0 \neq e_0 \in \mathfrak{g}_1^\nu$ mit $xe_0 \in L^{\widetilde{\alpha}_0}$. Für ein $l+1$-Tupel von nicht negativen ganzen Zahlen $(s_0, \ldots, s_l)$ ohne gemeinsame Faktoren definiere

$$m = k \sum_{j=0}^{l} a_j s_j,$$

wobei a_j die Koeffizienten des affinen Dynkin-Diagramms $X_n^{(k)}$ sind (Seite 39). Sei ϵ eine primitive m-te Einheitswurzel. Dann gilt:

(i) Die Vektoren $e_0, e_1, \ldots, e_l$ erzeugen $\mathfrak{g}$ und durch

$$\sigma(e_j) = \epsilon^{s_j} e_j, \quad (0 \leq j \leq l)$$

definiert man eindeutig einen Automorphismus von $\mathfrak{g}$ der Ordnung m. Man nennt ihn Automorphismus vom Typ $(k; s_0, \ldots, s_l)$. *Bis auf Konjugation in* $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ *erhält man so alle Automorphismen von $\mathfrak{g}$ der Ordnung m.*

(ii) Sind $j_1, \ldots, j_t$ diejenigen Indizes mit $s_{j_1} = \cdots = s_{j_t} = 0$, so ist $\mathfrak{g}_0^\sigma \equiv L_0$ direkte Summe eines $(l-t)$-dimensionalen Zentrums und einer halbeinfachen Lie-Algebra, deren Dynkin-Diagramm das Teildiagramm ist, das aus den Ecken $j_1, \ldots, j_t$ besteht.

3.3.5 Korollar
Es gilt: $\operatorname{Rg}\mathfrak{g}_0^\sigma = \dim \mathfrak{h}_0^\sigma = \dim \mathfrak{h}_0^\nu = \operatorname{Rg}\mathfrak{g}_0^\nu = l$.

Punkt (ii) des Satzes führt zur Lösung der vorhin gestellten Aufgabe:

3.3.6 Korollar
Seien $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie-Algebra vom Typ X_n und σ ein Automorphismus vom Typ $(k; s_0, \ldots, s_l)$. Dann gilt:

1. *Die reduktive Fixalgebra $\mathfrak{g}_0^\sigma$ ist genau dann* halbeinfach, *wenn $t = l$ ist, d.h., wenn genau* ein *$s_{j_0} \neq 0$ ist.*

2. *$\mathfrak{g}_0^\sigma$ ist genau dann* einfach, *wenn das Teildiagramm $X_n^{(k)} \setminus \{\alpha_{j_0}\}$ zusammenhängend ist.*

Da $s_0, \ldots, s_l$ nach Voraussetzung keine gemeinsamen Faktoren haben, ist sogar $s_{j_0} = 1$.

Um die zweite Bedingung aus Lemma 3.3.2 sichern zu können, untersuchen wir die Operation der Fixalgebra $\mathfrak{g}_0^\sigma$ auf $L_j = x^j \mathfrak{g}_{j (\mathrm{mod}\ m)}$ oder äquivalent auf $\mathfrak{g}_{j (\mathrm{mod}\ m)}$. Die folgenden Sachverhalte findet man in [OnVi], Seite 113f, 122.

3.3.7 Satz

Seien $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie-Algebra vom Typ X_n, σ ein Automorphismus vom Typ $(k; s_0, \ldots, s_l)$ der Ordnung $m = k \sum_{j=0}^{l} a_j s_j$ und $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^\sigma$ die reduktive Fixalgebra vom Rang l. Seien $r_1, \ldots, r_{d+1}$ $(d = l - t)$ die Indizes der nicht verschwindenden Koeffizienten $s_{r_1}, \ldots, s_{r_{d+1}}$. Für ein Tupel $c = (c_{r_1}, \ldots, c_{r_{d+1}})$ ganzer Zahlen definiere[17]

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(c) := \{ & \bar{\alpha} \in \bar{\Delta} | \\ & \bar{\alpha} := \sum_{j=0}^{l} k_j \bar{\alpha}_i \text{ ist eine } \sigma\text{-Wurzel mit } k_{r_1} = c_{r_1}, \ldots, k_{r_{d+1}} = c_{r_{d+1}} \}.\end{aligned}$$

Für $i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \equiv \{0, \ldots, m-1\}$ sei Ω_i die Menge aller Tupel $c = (c_{r_1}, \ldots, c_{r_{d+1}})$ ganzer Zahlen mit $c_{r_1} s_{r_1} + \cdots + c_{r_{d+1}} s_{r_{d+1}} = i$ und $\bar{\Delta}(c) \neq 0$. Für $i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und $c \in \Omega_i$ setzen wir

$$\mathfrak{g}_c := \bigoplus_{\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}(c)} \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}} \leq \mathfrak{g}_i$$

und unterscheiden 2 Fälle:

*I) σ ist ein innerer Automorphismus oder äquivalent $k = 1$:
Dann ist der $\mathfrak{g}_0$-Teilmodul $\mathfrak{g}_c$ einfach und*

$$\mathfrak{g}_i = \bigoplus_{c \in \Omega_i} \mathfrak{g}_c \tag{3.7}$$

ist die Zerlegung von $\mathfrak{g}_i$ in einfache $\mathfrak{g}_0$-Teilmoduln.

II) σ ist ein äußerer[18] *Automorphismus oder äquivalent $k \in \{2, 3\}$:
Ist*

$$\mathfrak{g}_0' = \bigoplus_{\kappa=1}^{b} \mathfrak{g}_0^{[\kappa]}$$

die Zerlegung des halbeinfachen Anteils von $\mathfrak{g}_0$ in einfache Ideale, so ist der $\mathfrak{g}_0$-Teilmodul $\mathfrak{g}_c$ halbeinfach; genauer

$$\mathfrak{g}_c = \bigoplus_{\kappa=1}^{b} \mathfrak{g}_c^{[\kappa]},$$

wobei $[\mathfrak{g}_0^{[\kappa]}, \mathfrak{g}_c^{[\lambda]}] = 0$ für $\kappa \neq \lambda$ und die Darstellung von $\mathfrak{g}_0^{[\kappa]}$ auf $\mathfrak{g}_c^{[\kappa]}$ treu und irreduzibel ist.

[17] Vermöge der Identifikation $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \equiv \{0, \ldots, m-1\}$ fassen wir $\bar{\Delta}$ als Teilmenge von $\widetilde{\Delta}$ auf und identifizieren $\bar{\alpha}_i$ mit der einfachen ν-Wurzel $\widetilde{\alpha}_i$.

[18] D.h. kein innerer Automorphismus.

In beiden Fällen operieren die zentralen Elemente von $\mathfrak{g}_0$ auf den einfachen Teilmoduln wie Skalare. Die Operation von $\mathfrak{g}_0$ auf $\mathfrak{g}_{m-i}$ ist dual (=kontragredient) zu ihrer Operation auf $\mathfrak{g}_i$.

Nun sind wir in der Lage, die Voraussetzung von Korollar 3.3.3 abzuschwächen:

3.3.8 Korollar
Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie-Algebra und σ ein Automorphismus mit einfacher Fixalgebra $\mathfrak{g}_0$. Dann ist $L(\mathfrak{g},\sigma)^+$ eine nil-graduierte Lie-Algebra mit

$$\mathfrak{g}_0\text{-cocl}(L(\mathfrak{g},\sigma)^+) = 0.$$

Beweis. Da $\mathfrak{g}_0$ einfach ist, ist $d = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) = 0$ und Ω_i besteht aus *einem* Element. Ebenfalls wegen der Einfachheit von $\mathfrak{g}_0$, ist $b = 1$, woraus schließlich die Einfachheit von $\mathfrak{g}_i$ als $\mathfrak{g}_0$-Modul folgt. Die Voraussetzung des Korollars 3.3.3 ist erfüllt, woraus die Behauptung folgt. □

Bevor wir die Automorphismen mit einfacher Fixalgebra klassifizieren, zitieren wir das folgende Lemma[19]:

3.3.9 Lemma
Sei σ ein Automorphismus vom Typ $(k; s_0, \ldots, s_l)$. Dann gilt:

(i) σ ist genau dann ein innerer Automorphismus, wenn $k = 1$ ist.

(ii) Sei σ' ein weiterer Automorphismus vom Typ $(k'; s'_0, \ldots, s'_l)$. σ und σ' sind genau dann konjugiert in $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, wenn $k = k'$ und das Tupel $(s_0, \ldots, s_l)$ durch einen Automorphismus des affinen Dynkin-Diagramms $X_n^{(k)}$ auf das Tupel $(s'_0, \ldots, s'_l)$ abbildbar ist.

Als Zusammenfassung der bisherigen Ergebnissen erhalten wir:

3.3.10 Satz
Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie-Algebra vom Typ X_n und σ ein Automorphismus vom Typ $(k; s_0, \ldots, s_l)$ und Ordnung $m = k\sum_{j=0}^{l} a_j s_j$. Die Algebra $L^+ = L(\mathfrak{g},\sigma)^+$ ist genau dann von $\mathfrak{g}_0^\sigma$-Koklasse 0, wenn sie als $\mathbb{N}$-graduierte Algebra zu einer der folgenden nil-graduierten *Algebren*

$$X_n^{(k)}(0, \ldots, \underbrace{1}_{=s_{j_0}}, \ldots 0)^+$$

isomorph ist. Dabei ist j_0 der Index aus Korollar 3.3.6(2), so daß $\mathfrak{g}_0^\sigma$ einfach ist. Mit l bezeichnen wir den Rang von $\mathfrak{g}_0^\sigma$ und mit $\dim L^+$ *die Zahlenfolge der Dimensionen der Faktoren der absteigenden Zentralreihe von L^+. Die Ordnung m von σ ist gleichzeitig die Periode von* $\dim L^+$.

[19]Dies ist Theorem 5.16, Seite 512 in [Hel].

$X_n^{(k)}$	l	$\dim X_n$	j_0	$m = ka_{j_0}$	$\mathfrak{g}_0^\sigma$	$\dim L^+$
$A_l^{(1)}$	$l \geq 1$	l^2+2l	0	1	A_l	$(l^2+2l,\ldots)$
$B_l^{(1)}$	$l \geq 3$	$2l^2+l$	0	1	B_l	$(2l^2+l,\ldots)$
$B_l^{(1)}$	$l \geq 3$	$2l^2+l$	l	2	D_l	$(2l,2l^2-l,\ldots)$
$C_l^{(1)}$	$l \geq 2$	$2l^2+l$	0	1	C_l	$(2l^2+l,\ldots)$
$D_l^{(1)}$	$l \geq 4$	$2l^2-l$	0	1	D_l	$(2l^2-l,\ldots)$
$E_6^{(1)}$	6	78	0	1	E_6	$(78,\ldots)$
$E_7^{(1)}$	7	133	0	1	E_7	$(133,\ldots)$
$E_7^{(1)}$	7	133	7	2	A_7	$(70,63,\ldots)$
$E_8^{(1)}$	8	248	0	1	E_8	$(248,\ldots)$
$E_8^{(1)}$	8	248	7	2	D_8	$(128,120,\ldots)$
$E_8^{(1)}$	8	248	8	3	A_8	$(84,84,80,\ldots)$
$F_4^{(1)}$	4	52	0	1	F_4	$(52,\ldots)$
$F_4^{(1)}$	4	52	1	2	B_4	$(16,36,\ldots)$
$G_2^{(1)}$	2	14	0	1	G_2	$(14,\ldots)$
$G_2^{(1)}$	2	14	1	3	A_2	$(3,3,8,\ldots)$
$A_{2l}^{(2)}$	$l \geq 2$	$4l^2+4l$	0	2	B_l	$(2l^2+3l,2l^2+l,\ldots)$
$A_{2l}^{(2)}$	$l \geq 2$	$4l^2+4l$	l	4	C_l	$(2l,2l^2-l,2l,2l^2+l\ldots)$
$A_2^{(2)}$	1	8	0	2	A_1	$(5,3,\ldots)$
$A_2^{(2)}$	1	8	1	4	A_1	$(2,1,2,3\ldots)$
$D_{l+1}^{(2)}$	$l \geq 2$	$2l^2+3l+1$	0	2	B_l	$(2l+1,2l^2+l,\ldots)$
$A_{2l-1}^{(2)}$	$l \geq 3$	$4l^2-1$	0	2	C_l	$(2l^2-l-1,2l^2+l,\ldots)$
$A_{2l-1}^{(2)}$	$l \geq 3$	$4l^2-1$	l	2	D_l	$(2l^2+l-1,2l^2-l,\ldots)$
$E_6^{(2)}$	4	78	0	2	F_4	$(26,52,\ldots)$
$E_6^{(2)}$	4	78	4	2	C_4	$(42,36,\ldots)$
$D_4^{(3)}$	2	28	0	2	G_2	$(14,14,\ldots)$
$D_4^{(3)}$	2	28	2	2	A_2	$(20,8,\ldots)$

Die letzte Zahl der Periode von $\dim L^+$ *ist die Dimension von* $\mathfrak{g}_0^\sigma$*.*

3.3.11 Bemerkung
In dem Artikel [NSW] von J. Wisliceny und anderen spielt die endlich präsentierte Lie-Algebra

$$\begin{aligned} L5 := \langle & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 | \\ & [x_1, x_2],\ [x_1, x_3],\ [x_3, x_5],\ [x_4, x_5], \\ & [x_1, x_4] - [x_2, x_3],\ [x_1, x_5] - [x_2, x_4],\ [x_2, x_5] - [x_3, x_4] \rangle \end{aligned}$$

eine wichtige Rolle. Ihr Dimensionsvektor ist $\dim L5 = (5, 3, 5, 3, \ldots)$. Durch folgende explizite Zuordnung verifiziere man die Isomorphie von $L5$ und $A_2^{(2)}(1, 0)^+$:

$$\begin{array}{lllll} x_1 & \mapsto & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ t & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, & x_5 & \mapsto \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & t \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ x_2 & \mapsto & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ t & \cdot & \cdot \\ \cdot & -t & \cdot \end{pmatrix}, & x_4 & \mapsto \begin{pmatrix} \cdot & t & \cdot \\ \cdot & \cdot & -t \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ x_3 & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{2}{3}t & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{3}t \end{pmatrix}. & & \end{array}$$

3.3.12 Bemerkung
Ersetzt man die Lie-Algebra $\mathfrak{g}_0$ durch die Lie-Gruppe

$$\mathrm{Int}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_0) := \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}_0) \leq \mathrm{Int}\mathfrak{g},$$

so erhält man denselben Koklassen-Begriff. Im weiteren betrachten wir deshalb nur noch Operationen von Lie-Gruppen.

Bei den affinen Dynkin-Diagrammen höherer Symmetrie erhalten wir, bis auf Konjugation, genau einen Automorphismus mit einfacher Fixalgebra. Jetzt versuchen wir diese *diskrete* Symmetrie auszunutzen, um weitere nil-graduierte Koklasse 0 Lie-Algebren zu konstruieren. Dazu ziehen wir eine weitere wichtige Folgerung aus Satz 3.3.4. Da das System $\widetilde{\Pi}$ einfacher σ-Wurzeln und das erweiterte Fundamentalsystem bezüglich σ die gleiche Kardinalität haben, identifizieren wir $\widetilde{\Pi}$ mit Π. Im weiteren steht also Π für ein Fundamentalsystem und *nicht* für ein erweitertes Fundamentalsystem.

3.3.13 Korollar
Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie-Algebra und σ ein Automorphismus der Ordnung m mit halbeinfacher *Fixalgebra (vgl. Korollar 3.3.6(1)). Dann ist $\mathrm{Fix}_{\mathrm{Aut}\widetilde{\Pi}}(\alpha_{j_0})$ eine Untergruppe von Automorphismen von $\mathfrak{g}$, die mit der Graduierung $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i^\sigma$ verträglich ist.*

Beweis. Aus der Darstellung von σ in Satz 3.3.4 folgt, daß der Stabilisator von α_{j_0} in $\mathrm{Aut}\widetilde{\Pi}$ σ festläßt. Das ist aber zur Verträglichkeit mit der σ-Graduierung äquivalent. $\square$

Aus diesem Korollar läßt sich der folgende Satz mühelos folgern.

3.3.14 Satz

Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie-Algebra vom Typ X_n und σ ein Automorphismus vom Typ $(k; s_0, \ldots, s_l)$ mit halbeinfacher, aber nicht einfacher Fixalgebra. Setze

$$G := \mathrm{Int}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}_0 \rtimes \mathrm{Fix}_{\mathrm{Aut}\widetilde{\Pi}}(\alpha_{j_0}) \leq \mathrm{Int}\mathfrak{g}.$$

Die Algebra $L^+ = L(\mathfrak{g}, \sigma)^+$ ist genau dann von G-Koklasse 0, wenn sie als $\mathbb{N}$-graduierte Algebra zu einer der folgenden nil-graduierten *Algebren*

$$X_n^{(k)}(0, \ldots, \underbrace{1}_{=s_{j_0}}, \ldots 0)^+$$

isomorph ist. Dabei ist j_0 der Index aus Korollar 3.3.6(1), so daß $\mathfrak{g}_0^\sigma$ homogen-halbeinfach[20] *ist.*

$X_n^{(k)}$	l	$\dim X_n$	j_0	$m = ka_{j_0}$	$\mathfrak{g}_0^\sigma$	$\dim L^+$
$C_l^{(1)}$	$l \geq 2$ l gerade	$2l^2 + l$	$\frac{l}{2} + 1$	2	$2C_{\frac{l}{2}}$	$(l^2, l^2 + l, \ldots)$
$D_4^{(1)}$	4	28	2	2	$4A_1$	$(16, 12, \ldots)$
$D_l^{(1)}$	$l \geq 4$ l gerade	$2l^2 - l$	$\frac{l}{2} - 1$	2	$2D_{\frac{l}{2}}$	$(l^2, l^2 - l, \ldots)$
$E_6^{(1)}$	6	78	3	3	$3A_2$	$(27, 27, 24, \ldots)$
$D_{l+1}^{(2)}$	$l \geq 2$ l gerade	$2l^2 + 3l + 1$	$\frac{l}{2} + 1$	2	$2B_{\frac{l}{2}}$	$((l+1)^2, l^2 + l, \ldots)$

Die diskrete Symmetriegruppe $\mathrm{Aut}\widetilde{\Pi}$ hat für $k = 1$ eine interessante Beschreibung:

3.3.15 Definition (Gewichtsgitter)

Sei Π ein (abstraktes) Fundamentalsystem. Mit $P := \langle \Pi \rangle_{\mathbb{Z}}$ bezeichnen wir das Wurzelgitter und mit

$$Q := \langle \gamma \in E |\ \langle \gamma | \alpha \rangle \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \alpha \in \Delta \rangle$$

das sog. *Gewichtsgitter* von $\mathfrak{g}$. Die Faktorgruppe $\Gamma = P/Q$ ist endlich. Es gilt sogar $|P/Q| = \det A$, wobei A die Cartan-Matrix des Systems ist.

[20] D.h., direkte Summe von paarweise isomorphen einfachen Idealen.

3.3.16 Lemma
Sei Π ein Fundamentalsystem vom Typ X_n. In der folgenden Tabelle sind $\mathrm{Aut}\Pi$ *und $\Gamma = P/Q$ aufgelistet:*

X_l	Γ	$\mathrm{Aut}\Pi$
A_1	C_2	$\{1\}$
A_l $l \geq 2$	C_{l+1}	C_2
B_l $l \geq 2$	C_2	$\{1\}$
C_l $l \geq 3$	C_2	$\{1\}$
D_4	$C_2 \times C_2$	S_3
D_l $l \geq 6$, l gerade	$C_2 \times C_2$	C_2
D_l $l \geq 5$, l ungerade	C_4	C_2
E_6	C_3	C_2
E_7	C_2	$\{1\}$

Für E_8, F_4 und G_2 sind beide Gruppen trivial.

3.3.17 Lemma
Sei $\widetilde{\Pi}$ ein erweitertes Fundamentalsystem von Typ $X_n^{(k)}$ und $\Pi = \widetilde{\Pi} \setminus \{\alpha_0\}$ das dazugehörige Fundamentalsystem. Für $k = 1$ gilt:

$$\mathrm{Aut}\widetilde{\Pi} \cong \Gamma \rtimes \mathrm{Aut}\Pi.$$

Für $k = 2, 3$ mit Ausnahme $D_{l+1}^{(2)}$ sind die Automorphismen von $\mathrm{Aut}\widetilde{\Pi}$ *trivial.*

$X_n^{(k)}$	$A_1^{(1)}$	$A_l^{(1)}$ $l \geq 2$	$B_l^{(1)}$ $l \geq 3$	$C_l^{(1)}$ $l \geq 2$	$D_4^{(1)}$	$D_l^{(1)}$ $l \geq 5$	$E_6^{(1)}$	$E_7^{(1)}$	$D_{l+1}^{(2)}$ $l \geq 2$
	C_2	$D_{2(l+1)}$	C_2	C_2	S_4	D_8	S_3	C_2	C_2

Wir kehren zum allgemeinen Fall zurück, wo $\mathfrak{g}_0^\sigma$ reduktiv ist.

3.3.18 Bemerkung
Läßt $L(\mathfrak{g}, \sigma)^+$ irreduzible Operationen einer Lie-Gruppe auf all ihren homogenen Teilräumen L_j^σ zu, so muß $\mathfrak{g}_0$ entweder homogen-halbeinfach oder abelsch sein.

3.3.19 Bemerkung
- Den halbeinfachen bzw. homogen-halbeinfachen Fall haben wir bereits in den Sätzen 3.3.10 und 3.3.14 diskutiert.

- Die erste Schwierigkeit beim abelschen Fall ist, daß die Gruppe $\mathrm{Int}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_0)$ trivial ist. Sie muß durch die Gruppe $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_0) := \{g \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g} | \; g\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0\}$ ersetzt werden.

Aus Satz 3.3.4 folgt:

3.3.20 Korollar
Sei $\mathfrak{g}$ einfach und σ ein Automorphismus vom Typ $(k; s_0, \ldots, s_l)$. $\mathfrak{g}_0^\sigma$ ist genau dann abelsch, wenn $s_j \neq 0$ für alle $j = 0, \ldots, l$.

3.3.21 Beispiel
Wir betrachten jetzt Beispiele von Automorphismen mit abelscher Fixalgebra:

$X_n^{(k)}(s_0, \ldots, s_l)^+$	$l = \dim \mathfrak{g}_0$	$\dim X_n$	m	$\mathfrak{g}_0^\sigma$	$\dim L^+$
$A_1^{(1)}(1,1)^+$	1	3	2	$\mathbb{K}$	$(2, 1, \ldots)$
$A_1^{(1)}(2,1)^+$	1	3	3	$\mathbb{K}$	$(2, 1, \ldots)$
$A_2^{(2)}(1,1)^+$	1	8	6	$\mathbb{K}$	$(2, 1, 1, 1, 2, 1, \ldots)$
$A_2^{(2)}(2,1)^+$	1	8	8	$\mathbb{K}$	$(2, 1, 1, 1, 2, 1, \ldots)$

Anhand dieser Beispiele erkennen wir folgende Schwierigkeiten beim abelschen Fall:

1. Im Gegensatz zu $A_1^{(1)}(1,1)^+$ ist $A_2^{(2)}(1,1)^+$ auf keine Weise eine Koklasse 0 Algebra.

2. Die σ-Graduierung von $A_1^{(1)}(2,1)^+$ bzw. $A_2^{(2)}(2,1)^+$ ist eine $\mathfrak{not}$-*Graduierung* und fällt nicht mit der nil-Graduierung zusammen.

3. Es treten unerwartete Isomorphien auf: $A_1^{(1)}(1,1)^+ \cong A_1^{(1)}(2,1)^+$, obwohl $A_1^{(1)}(1,1) \not\cong A_1^{(1)}(2,1)$. Das gilt ebenfalls für $A_2^{(2)}(1,1)^+$ und $A_2^{(2)}(2,1)^+$.

Literaturverzeichnis

[AnGo] J. Ancochea-Bermudez, M. Goze. *Classification des algèbres des Lie filiformes de dimension 8.* Arch. Math. 50, 511-525. Zbl. 628.17005 (1988).

[Br74] F. Bratzlavsky. *Classification des algèbres des Lie nilpotentes de dimension n, de classe n-1, dont l'idéal dérivé est commutatif.* Bull. Cl. Sci., V Sér., Acad. R. Belg. 60, 858-865. Zbl.364.17007 (1974).

[BSZ] Y. Barnea, A. Shalev and E.I. Zelmanov. *Graded subalgebras of affine Kac-Moody algebras.* May 20, 1996, Preprint.

[CMNS] A. Caranti, S. Mattarei, M.F. Newman and C.M. Scoppola. *Thin groups of prime-power order and thin Lie algebras.* Mathematics Research Report No. MRR 013-94.

[Car] A. Caranti *Preseting The Graded Nottingham Lie Algebra.* 2 October 1996, Preprint.

[CoGr] F. Constantinescu und H.F. de Groote. *Geometrische und algebraische Methoden der Physik: Supermannigfaltigkeiten und Virasoro-Algebren.* Teubner Studienbücher. Mathematik.

[Crt] Roger W. Carter. *Simple Groups of Lie Type.*

[Dix] Jacques Diximier. *Enveloping Algebras.* North-Holland Mathematical Library.

[GK] V.P. Gerdt, V.V. Kornyak. *The program for construction of finitely presented Lie algebras, Hall numeration. Version of September 15, 1996*

[Hel] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* Academic Press, 1978.

[HiNe] J. Hilgert und K.-H. Neeb. *Lie-Gruppen und Lie-Algebren.* Verlag Vieweg.

[HoPl86] D.F. Holt and W. Plesken. *A_5-invariant 2-groups with no trivial sections.* Quart. J. Math. Oxford (2), 37 (1986), 39-47.

[HoPl93] D.F. Holt and W. Plesken. *The p-coclass of a Group.* Journal of Algebra, Vol. 162, No. 2, December 15, 1993.

[Kac67] V.G. Kac. *Simple graduated Lie algebras of finite growth.* Funkt. Analis. i ego Orilozh. 1 (1967), No. 4, 82-83. English translation: Funct. Anal. Appl. 1 (1967), 328-329.

[Kac68] V.G. Kac. *Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth.* Izvestija AN USSR (ser. mat.) 32 (1968), 1923-1967. English translation: Math. USSR-Izvestija 2 (1968), 1271-1311.

[Kac69] V.G. Kac. *Automorphisms of finite order of semisimple Lie algebras.* English transl.: Funct. Anal. Appl. 3, 252-254 (1970).

[Kac] V.G. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press. Second edition, 1985.

[Kir] A.A. Kirillov. *Elements of the Theory of Representations.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag.

[Kow] H.J. Kowalsky. *Lineare Algebra.* de Gruyter Lehrbuch.

[LGMc] C.R. Leedham-Green and Susan Mckay. *On the Classification of p-Groups of maximal Class.* Quart. J. Math. Oxford (2), 35 (1984), 293-304.

[Magn] L. Magnin. *Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension ≤ 7.* Geom. Phys. 3, 119-144 . Zbl. 594.17006 (1986).

[Mat] O. Mathieu. *Sur un problème de V.G. Kac: La classification de certain algèbres de Lie graduées simples.* J. Algebra (1986).

[MiFo] A. Mishchenko and A. Fomenko. *A Course of Differential Geometry and Topology.* Mir Publishers Moscow.

[NSW] M.F. Newman, G. Sauerbier, J. Wisliceny. *Groups of prime-power order with a small number of relations.* Rostock. Math. Kolloq. 49, 141-154 (1995).

[San] L.J. Santharoubane. *Kac-Moody Lie algebras and the classification of nilpotent Lie algebras of maximal rank.* Canad. Journ. of Math. 34, n. 6, 1982, p. 1215-1239.

[OnVi] A.L. Onishchik and E.B. Vinberg. (Eds.) *Lie Groups and Lie Algebras III.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Volume 41. Springer-Verlag.

[SaWe] D.H. Sattinger and O.L. Weaver. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics.*

[SiSt] I.M. Singer and S. Sternberg. *The infinite groups of Lie and Cartan.* J. Analyse Math. 15 (1965), 1-114.

[Weis] B.Yu. Weisfeiler. *Infinite dimensional filtered Lie algebras and their connection with graded Lie algebras.* Funct. Anal. Appl. 2 (1968), 88-89.

Abbildungsverzeichnis

Index

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die Aufgabenstellung selbständig bearbeitet und keine außer den angegebenen Hilfsmitteln verwendet habe.

Aachen, den 16. Oktober 1997,

Mohamed Barakat