Computeralgebra-Praktikum

Universität Siegen — Mohamed Barakat

Aufgabe 9 (Fortsetzung von Aufgabe 9)**.** Sei $f : A \to C$ eine Abbildung endlicher Mengen. Schreibe in unserem skeletalen Modell der Kategorie endlicher Mengen zwei Prozeduren

- $\texttt{is\_liftable}(f, g)$ und $\texttt{lift}$, die für eine weitere Abbildung $g : B \to C$ endlicher Mengen entscheidet, ob ein *Lift* $\chi : A \to B$ *von* f *entlang* g existiert, sprich das Gleichungssystem $g \circ \chi = f$ löst, und χ gegebenenfalls berechnet.
- $\texttt{is\_coliftable}(f, g)$ und $\texttt{colift}$, die für eine weitere Abbildung $g : A \to B$ endlicher Mengen entscheidet, ob ein *Colift* $\chi : C \to B$ *von* g *entlang* f existiert, sprich das Gleichungssystem $\chi \circ f = g$ löst, und χ gegebenenfalls berechnet.

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

Definition. Seien $\mathtt{A} \in R^{r\times c}$ und $\mathtt{B} \in R^{r'\times c}$. Wir sagen $\mathtt{A}$ **dominiert** $\mathtt{B}$ **zeilenmäßig**, falls ein $\mathtt{X} \in R^{r'\times r}$ mit $\mathtt{B} = \mathtt{XA}$ existiert (wir schreiben $\mathtt{A} \geq_{\mathrm{row}} \mathtt{B}$).

Definition. Sei $\mathtt{A} \in R^{r\times c}$ eine Matrix über R. Eine Matrix $\mathtt{S} \in R^{a\times r}$ heißt **Zeilen-Syzygienmatrix von** $\mathtt{A}$, falls gilt

- $\mathtt{SA} = 0$;
- $\mathtt{S}$ dominiert jede andere Matrix $\mathtt{S}' \in R^{a'\times r}$ zeilenmäßig, die $\mathtt{S}'\mathtt{A} = 0$ genügt.

Aufgabe 10. Sei $R \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{F}_5, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}[x], \mathbb{F}_5[y]\}$. Programmiere folgende Algorithmen:

- $\texttt{decide\_zero\_rows}(\mathtt{B}, \mathtt{A})$ die entscheidet, ob $\mathtt{A} \geq_{\mathrm{row}} \mathtt{B}$, d.h. ob eine Lösungsmatrix $\mathtt{X}$ mit $\mathtt{XA} = \mathtt{B}$ existiert: Der Algorithmus gibt eine Matrix $\mathtt{B}'$ zurück (mit denselben Dimensionen wie $\mathtt{B}$), für die die Gleichung $\mathtt{XA} = \mathtt{B} - \mathtt{B}'$ lösbar ist und wo die i-te Zeile $\mathtt{B}'_i$ genau dann verschwindet, wenn die Gleichung $\mathtt{xA} = \mathtt{B}_i$ lösbar ist. Insbesondere gilt, die Gleichung $\mathtt{XA} = \mathtt{B}$ ist genau dann lösbar, wenn $\texttt{decide\_zero\_rows}(\mathtt{B}, \mathtt{A}) = 0$;
- $\texttt{decide\_zero\_rows\_effectively}(\mathtt{B}, \mathtt{A})$ berechnet eine Matrix $\mathtt{T}$, die $\mathtt{B} + \mathtt{TA} = \mathtt{B}'$ mit $\mathtt{B}' = \texttt{decide\_zero\_rows}(\mathtt{B}, \mathtt{A})$ erfüllt. Insbesondere gilt: Falls die Gleichung $\mathtt{XA} = \mathtt{B}$ lösbar ist, dann ist
$$\mathtt{X} := -\mathtt{T} =: \texttt{right\_divide}(\mathtt{B}, \mathtt{A});$$
- $\texttt{syzygies\_of\_rows}(\mathtt{A})$ die eine Zeilen-Syzygienmatrix $\mathtt{S}$ von von $\mathtt{A}$ berechnet.

Hinweis: Wende $\texttt{strictly\_fully\_divide\_matrix\_trafo}$ auf $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathtt{B} & 0 \\ 0 & \mathtt{A} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ an und erhalte $\begin{pmatrix} 1 & \mathtt{B}' & -\mathtt{X} \\ 0 & \mathtt{A}' & \mathtt{Y} \\ 0 & 0 & \mathtt{S} \end{pmatrix}$. Die letzte Matrix ist offensichtlich das Produkt $\begin{pmatrix} 1 & -\mathtt{X} \\ 0 & \mathtt{Y} \\ 0 & \mathtt{S} \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathtt{B} & 0 \\ 0 & \mathtt{A} & 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \mathtt{B}' & -\mathtt{X} \\ 0 & \mathtt{A}' & \mathtt{Y} \\ 0 & 0 & \mathtt{S} \end{pmatrix}$. Es ist $\mathtt{B}' = \mathtt{B} - \mathtt{XA}$ und das Gleichungssystem $\mathtt{XA} = \mathtt{B}$ ist genau dann lösbar (mit Lösung $\mathtt{X}$), wenn $\mathtt{B}'$ verschwindet. Wir erhalten die Algorithmen $\mathtt{B}' = \texttt{decide\_zero\_rows}(\mathtt{B}, \mathtt{A})$ und $(\mathtt{B}', -\mathtt{X}) = \texttt{decide\_zero\_rows\_effectively}(\mathtt{B}, \mathtt{A})$. Die Matrix $\mathtt{S}$ ist eine Zeilen-Syzygienmatrix und wir erhalten den Algorithmus $\mathtt{S} = \texttt{syzygies\_of\_rows}(\mathtt{A})$. Benutze ebenfalls $\texttt{UnionOfRows}$ und $\texttt{UnionOfColumns}$.