Algebra - WS 2016/17

UNIVERSITÄT SIEGEN

Übungsblatt 13

Prof. Dr. Mohamed Barakat, Sebastian Gutsche

Aufgabe 1. (Gruppenalgebren. 2 Punkte.)
Sei K ein Körper mit Charakteristik $\neq n$. Zeige, dass

$$KC_n \cong K[x]/\langle x^n - 1\rangle .$$

Aufgabe 2. (Gruppen- und Algebrendarstellung. 4 Punkte.)
Zeige den Kommentar nach Definition 6.6 aus dem Skript: Sei G eine Gruppe und K ein Körper. Zeige den Kommentar nach Definition 6.6 aus dem Skript: Vermöge Einschränken bzw. linearem Fortsetzen korrespondieren die Darstellungen von G und KG.

Aufgabe 3. (Darstellungen. 4 Punkte.)

1. Bestimme alle irreduziblen Darstellungen von S_3 über $\mathbb{Q}$ bis auf Äquivalenz.
2. Zeige, dass insbesondere $\mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper von S_3 ist.

Aufgabe 4. (Satz von Maschke. 4 Punkte.)
Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) \nmid |G|$. Sei weiterhin $\mathfrak{a} \trianglelefteq KG$ ein Ideal und $\mathcal{V} \leq KG$ ein K-Vektorraumkomplement von $\mathfrak{a}$. Sei $\pi : KG \to \mathfrak{a}$ die K-Vektorraumprojektion entlang $\mathcal{V}$ auf $\mathfrak{a}$. Zeige, dass die Abbildung

$$\rho_G(\pi) : KG \to KG,\ x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi\left(g^{-1}x\right)$$

ein KG-Modulhomomorphismus ist, welcher ebenfalls eine Projektion auf $\mathfrak{a}$ ist.

Aufgabe 5. (KG-Moduln. 4 Punkte.)
Zeige die Details aus Beispiel 6.9.2 aus der Vorlesung: Sei G eine endliche Gruppe, M eine endliche G-Menge und $\mathcal{V}$ der K-Vektorraum mit Basis M. Zeige, dass durch lineare Fortsetzung der Operation von G der Vektorraum $\mathcal{V}$ zu einem KG-Modul wird. Die Abbildung

$$\mathrm{fix}_M : G \to K,\ g \mapsto |\{m \in M | gm = m\}| \cdot 1_K$$

ist der Charakter dieser Darstellung. Sei $e := \sum_{m \in M} m \in \mathcal{V}$. Zeige, dass falls $\mathrm{Char}(K) \nmid |M|$ gilt,

$$\mathcal{V} = Ke \oplus \sum_{m \in M} K(m - \tfrac{1}{|M|}e)$$

eine Zerlegung in KG-Moduln ist. Der Charakter des zweiten Summanden ist $\mathrm{fix}_M - \mathbb{1}$.

Aufgabe 6. (Permutationscharakter. 4 Punkte.)
Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper. Die reguläre Operation von G besitzt als Permutationscharakter $\rho\colon G \to K$ mit

$$\rho(g) = \begin{cases} |G| \cdot 1_K & \text{falls } g = 1_G, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass falls $\operatorname{Char}(G) \nmid |G|$ und K ein Zerfällungskörper von G ist, so ist

$$\rho = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}_K(G)} \chi(1)\chi$$

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Mittwoch, 01.02.2016, 10:00 Uhr in den Kasten im ENC, 2. Etage, am Zugang zum Gebäudeteil D ein. Bitte verseht eure Abgabe mit Namen und Matrikelnummer.