

Übungsblatt 10

PROF. DR. MOHAMED BARAKAT, SEBASTIAN GUTSCHE

Aufgabe 1. (Kreisteilungspolynome. 5 Punkte.)

1. Zeige: Für eine Primzahl p gilt

$$\Phi_p(x) = \sum_{i=0}^{p-1} x^i.$$

2. Zeige: Für ein ungerades $n > 1$ gilt

$$\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x).$$

3. Zeige: Für $n = p^m r$, wobei p prim und $\text{ggT}(p, r) = 1$ ist, gilt

$$\Phi_n(x) = \Phi_{pr}(x^{p^{m-1}}).$$

4. Sei $n = p_1 \cdots p_n$, wobei p_1, \dots, p_n paarweise verschiedene Primzahlen sind, und p sei eine weitere ungerade Primzahl. Zeige:

$$\Phi_{np}(x) = \Phi_n(x^p) / \Phi_n(x).$$

5. Bestimme Φ_{60} .

Aufgabe 2. (Diskriminante. 4 Punkte.)

Sei k ein Körper mit $\text{Char}(k) \neq 2, 3$. Weiter sei K der Zerfällungskörper des separablen und irreduziblen Polynoms $f := X^3 + bX + c \in k[X]$. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$ die Nullstellen von f , $\delta := (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3)$, und $\Delta := \delta^2$. Zeige:

1. $\Delta = -4b^3 - 27c^2 \in k$.

2. $\text{Aut}_k(f) \cong S_3 \Leftrightarrow \Delta$ ist kein Quadrat in k .

3. $\text{Aut}_k(f) \cong A_3 \Leftrightarrow \Delta$ ist ein Quadrat in k .

Aufgabe 3. (Galoisgruppe. 4 Punkte.)

Bestimme den Isomorphietyp von $\text{Gal}(\mathbb{F}_2[\zeta_7]/\mathbb{F}_2)$.

Aufgabe 4. (Konstruktion. 4 Punkte + 2 Bonuspunkte.)

1. Zeige, dass man eine gegebene Strecke mit Zirkel und Lineal im Goldenen Schnitt teilen kann, d.h. das Verhältnis des größeren Teilstücks zur Gesamtstrecke ist gleich dem Verhältnis des kleineren Teilstücks zum größeren.
2. Konstruiere den Goldenen Schnitt.

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Mittwoch, 11.01.2016, 10:00 Uhr in den Kasten im ENC, 2. Etage, am Zugang zum Gebäudeteil D ein. Bitte verseht eure Abgabe mit Namen und Matrikelnummer.