Algebra - WS 2016/17

UNIVERSITÄT SIEGEN

Übungsblatt 08

Prof. Dr. Mohamed Barakat, Sebastian Gutsche

Die Weihnachtsfeier der Fachschaft Mathematik und Physik findet am 16. Dezember um 18:00 Uhr im Sofaraum (ENC D-118) statt.

Aufgabe 1. (Diedergruppe. 2 Punkte.)
Es sei die D_{2n} definiert wie in 2.53. Zeige:

$$D_{2n} \cong \left\langle a, b \;\middle|\; a^n = b^2 = (ab)^2 = 1 \right\rangle .$$

Aufgabe 2. (Quarternionengruppe. 4 Punkte.)
Es sei

$$Q_8 := \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) .$$

Zeige ohne Benutzung von 2.81:

1. Q_8 hat Ordnung 8.
2. Q_8 ist nicht abelsch.
3. Jede Untergruppe von Q_8 ist normal.
4. Es ist $\mathrm{Aut}(Q_8) \cong S_4$.

Aufgabe 3. (Satz von Cayley. 6 Punkte.)
Nach dem Satz von Cayley kann man jede Gruppe als eine Gruppe von Permutationen realisieren, sprich als eine Untergruppe von S_n. Bestimme

$$n := \min\{m \in \mathbb{N} \mid \exists U \leq S_m : G \cong U\}$$

und ein Erzeugendensystem für eine solche Darstellung für alle

$$G \in \{C_3, C_4, C_5, C_6, S_3, D_8, Q_8\}.$$

Hinweis: Diese Information kann man an $\mathcal{U}(G)$ samt Konjugiertheit von Untergruppen ablesen.

Aufgabe 4. (Normalteiler. 4 Punkte.)

1. Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe vom Index 3. Zeige: G hat einen Normalteiler vom Index 2 oder 3.

   Hinweis: Betrachte einen geeigneten Homomorphismus $G \to S_3$.

2. Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe vom Index 4. Zeige: G hat einen Normalteiler vom Index 2 oder 3.

   Hinweis: Sämtliche Untergruppen der S_4, die transitiv auf 4 Punkten operieren, sind isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

$$S_4,\ A_4,\ D_8,\ V_4,\ C_4.$$

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Mittwoch, 14.12.2016, 10:00 Uhr in den Kasten im ENC, 2. Etage, am Zugang zum Gebäudeteil D ein. Bitte verseht eure Abgabe mit Namen und Matrikelnummer.