Algebra - WS 2016/17

UNIVERSITÄT SIEGEN

Übungsblatt 07

Prof. Dr. Mohamed Barakat, Sebastian Gutsche

Aufgabe 1. (Alternierende Gruppe. 4 Punkte.)

1. Für $n \geq 3$ ist die Menge der 3-Zykel in der S_n ein Erzeugendensystem der A_n.

2. Für $n \geq 5$ ist jeder 3-Zykel Kommutator zweier 3-Zykel.

Aufgabe 2. (Semidirekte Produkte. 4 Punkte.) Beweise Lemma 2.28 aus der Vorlesung: Es seien U, N Gruppen und $\phi : U \to \mathrm{Aut}\,(N)$ ein Homomorphismus.

1. Es ist $N \rtimes_\varphi U := (N \times U, \star)$ eine Gruppe, vermöge

$$\star : (N \times U) \times (N \times U) \to N \times U,\ ((n, u), (\widetilde{n}, \widetilde{u})) \mapsto (n\varphi(u)(\widetilde{n}), u\widetilde{u})\,.$$

2. Es ist $N \rtimes_\varphi U$ das innere semidirekte Produkt des Normalteilers $N \times \{1\}$ und der Untergruppe $\{1\} \times U$ von $N \rtimes_\varphi U$.

Aufgabe 3. (Semidirekte Produkte und Klassifikation. 4 Punkte.)

1. Zeige: Es gibt zwei semidirekte Produkte $C_3 \rtimes C_4$. Eines ist isomorph zur C_{12}, das andere bezeichnen wir mit G_{12}.

2. Zeige: A_4, $D_{12} := \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 6), (3, 5) \rangle$, und G_{12} sind paarweise nicht isomorph.

Aufgabe 4. (Auflösbare Gruppen. 6 Punkte.)
Seien p, q, r paarweise verschiedene Primzahlen. Zeige:

1. Jede Gruppe der Ordnung $p^n q$ ist auflösbar.

2. Jede Gruppe der Ordnung $p^2 q^2$ ist auflösbar.

3. Jede Gruppe der Ordnung pqr ist auflösbar.

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Mittwoch, 07.12.2016, 10:00 Uhr in den Kasten im ENC, 2. Etage, am Zugang zum Gebäudeteil D ein. Bitte verseht eure Abgabe mit Namen und Matrikelnummer.