

Übungsblatt 06

PROF. DR. MOHAMED BARAKAT, SEBASTIAN GUTSCHE

Aufgabe 1. (Kommutatoren und Zentrum. 3 Punkte.)

Sei G eine Gruppe. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. $G' \leq Z(G)$.
2. Für alle $x, y, z \in G$ gilt $[x, z][y, z] = [xy, z]$.
3. Für alle $x, y, z \in G$ gilt $[x, y][x, z] = [x, yz]$.

Aufgabe 2. (Kompositionsreihe. 2 Punkte.)

Sei G eine abelsche Gruppe.

1. Zeige: G besitzt genau dann eine Kompositionsreihe, wenn G endlich ist.
2. Sei G endlich. Dann besitzt G genau dann **genau** eine Kompositionsreihe, wenn G zyklisch von Primzahlpotenzordnung ist.

Aufgabe 3. (Märchenhafte Gruppe. 3 Punkte.)

Es sei G eine Gruppe.

1. Zeige: Sind alle p -Sylow-Gruppen von G normal, so ist die Gruppe G das direkte Produkt ihrer p -Sylow-Gruppen.

Hinweis, darf ohne Beweis benutzt werden: Seien $M, N \trianglelefteq G$ mit $M \cap N = \{1\}$. Dann ist $NM = MN = \langle M, N \rangle \cong M \times N$.

2. Zeige: Es existiert bis auf Isomorphie genau eine Gruppe G der Ordnung 1001.
3. Bestimme alle Kompositionsreihen von G .

Aufgabe 4. (Diedergruppe. 4 Punkte.)

1. Bestimme die Automorphismengruppe von D_8 .
2. Bestimme die inneren Automorphismen von D_8 .
3. Zeige: $\text{Inn}(D_8)$ ist nicht charakteristisch in $\text{Aut}(D_8)$.
4. Bestimme alle Kompositionsreihen, Hauptreihen und charakteristische Reihen von D_8 .

Aufgabe 5. (Affine Gruppe. 4 Punkte.)

Sei p eine Primzahl. Eine Abbildung $\sigma : \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ heißt affin, falls $a, b \in \mathbb{F}_p$, $a \neq 0$ existieren mit

$$\sigma(x) = ax + b.$$

Sei G die Menge aller affinen Abbildungen $\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$.

1. Zeige: G ist eine Gruppe, isomorph zur Gruppe der Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_p^*, b \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

2. Gebe einen surjektiven Homomorphismus $G \rightarrow \mathbb{F}_p^*$ an, dessen Kern zyklisch von Ordnung p ist.
3. Zeige: G ist auflösbar.

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Mittwoch, 30.11.2016, 10:00 Uhr in den Kasten im ENC, 2. Etage, am Zugang zum Gebäudeteil D ein. Bitte verseht eure Abgabe mit Namen und Matrikelnummer.