Algebra - WS 2016/17

Übungsblatt 03

Prof. Dr. Mohamed Barakat, Sebastian Gutsche

Aufgabe 1. (Algebraische Erweiterung. 4 Punkte.)
Sei L/K eine Körperweiterung. Zeige: L/K ist genau dann algebraisch, wenn jeder Ring R mit $K \leq R \leq L$ ein Körper ist.

Aufgabe 2. (Separabilitätsgrad. 4 Punkte.)
Zeige Satz 1.47 aus der Vorlesung: Seien $E \geq L \geq K$ Körpererweiterungen mit $[E : K]$ endlich. Dann ist

$$[E : K]_s = [E : L]_s [L : K]_s.$$

Aufgabe 3. (Endliche Körper. 4 Punkte.)
Es sei K ein Körper mit Charakteristik $p > 0$ und $f(x) = x^p - x - a \in K[x]$. Zeige:

1. Ist $\alpha \in \overline{K}$ eine Nullstelle von f, so ist auch $\alpha + 1$ eine Nullstelle von f.
2. $K[\alpha]/K$ ist separabel und normal.
3. f ist genau dann reduzibel, wenn ein $b \in K$ existiert mit $b^p - b = a$.

Aufgabe 4. (Körpererweiterung. 4 Punkte.)
Sei $K := \mathbb{F}_2[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$ und $L := K[y]/\langle y^3 + y + 1\rangle$.

1. Zeige, dass $y^3 + y + 1$ irreduzibel in $K[y]$ ist, und bestimme $[L : \mathbb{F}_2]$.
2. Bestimme ein primitives $\alpha \in L$, so dass $L \cong \mathbb{F}_2[\alpha]$ ist.
3. Ist $L/\mathbb{F}_2$ separabel oder normal?
4. Konstruiere $\mathbb{F}_{16}$ als einfache Körpererweiterung von $\mathbb{F}_2$.

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Mittwoch, 09.11.2016, 10:00 Uhr in den Kasten im ENC, 2. Etage, am Zugang zum Gebäudeteil D ein. Bitte verseht eure Abgabe mit Namen und Matrikelnummer.