Algebra - WS 2016/17

UNIVERSITÄT SIEGEN

Übungsblatt 02

Prof. Dr. Mohamed Barakat, Sebastian Gutsche

In diesem Übungsblatt bezeichnet K einen Körper.

Aufgabe 1. (Gradschranke und Transzendenzgrad. 4 Punkte.)

1. Sei L/K algebraische Körpererweiterung und $a, b \in L$. Zeige:

$$\deg\left(\mu_{b,K}\right) \leq \deg\left(\mu_{a,K}\right) \deg\left(\mu_{b,K[a]}\right).$$

2. Es sei L/K eine Körpererweiterung und $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Transzendenzbasis von L über K. Sei weiterhin $a \in L$ algebraisch unabhängig über K, und $f \in K[x_1, \dots, x_n, t]$ mit $f(b_1, \dots, b_n, a) = 0$ habe Grad > 0 in x_1 und $x_1 \nmid f$. Zeige: $\{a, b_2, \dots, b_n\}$ ist algebraisch unabhängig.

Aufgabe 2. (Transzendenzgrad. 4 Punkte.)
Zeige Bemerkung 1.18: Seien $L > E > K$ Körpererweiterungen. Dann gilt

$$\mathrm{trdeg}(L, K) = \mathrm{trdeg}(L, E) + \mathrm{trdeg}(E, K).$$

Aufgabe 3. (Körpererweiterung. 4 Punkte.)
Es sei $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{5} \in \mathbb{R}$. Bestimme $[K[\alpha] : K]$ und das Minimalpolynom von α für

1. $K = \mathbb{Q}$
2. $K = \mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$
3. $K = \mathbb{Q}\left[\sqrt{10}\right]$

Aufgabe 4. (Körpererweiterung. 4 Punkte.)
Es sei $f(X) = X^3 + X^2 + X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$, und es sei $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ für eine Nullstelle α von f. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

1. Berechne $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]$ und gebe eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}[\alpha]$ an.
2. Berechne das Minimalpolynom von $\alpha^2 + \alpha + 1$ über $\mathbb{Q}$.
3. Berechne das Inverse von $\alpha + 1$.

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Mittwoch, 02.11.2016, 10:00 Uhr in den Kasten mit der Aufschrift "*HIER auch Abgabe von <u>ÜBUNGEN</u> für VORLESUNGEN von Prof. Barakat*" ein. Dieser befindet sich im ENC, 2. Etage, am Zugang zum Gebäudeteil D. Bitte verseht eure Abgabe mit Namen und Matrikelnummer.