Algebra - WS 2016/17

UNIVERSITÄT SIEGEN

Übungsblatt 01

Prof. Dr. Mohamed Barakat, Sebastian Gutsche

In diesem Übungsblatt bezeichnet K einen Körper.

Aufgabe 1. (Wohlordnung. 4 Punkte.)
Die folgenden Aussagen sollen ohne Benutzung des Auswahlaxioms gezeigt werden.

1. Zeige: Es existiert eine Wohlordnung auf $\mathbb{Z}$.
2. Folgere: Auf jeder abzählbaren Menge existiert eine Wohlordnung.
3. Zeige: Es existiert eine Wohlordnung auf $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. (Satz von Cantor. 4 Punkte.)

1. Zeige: Für alle Mengen X gilt
$$|X| < |\mathrm{Pot}(X)|\,.$$
Genauer: Es existiert eine injektive Abbildung $X \to \mathrm{Pot}(X)$, jedoch keine surjektive.
2. Folgere aus 1.: Die Menge aller Mengen existiert nicht.
3. Beweise die Aussage aus 2., ohne 1. zu benutzen.

Aufgabe 3. (Maximale Teilräume. 4 Punkte.)
Zeige: Jeder Vektorraum besitzt einen maximalen Unterraum.

Aufgabe 4. (Körpererweiterung. 4 Punkte.)
Zeige: Sei L/K Körpererweiterung und $a \in L$ algebraisch über K. Dann ist $K[a]$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum und
$$m_a : K[a] \to K[a], z \mapsto az$$
eine K-lineare Abbildung. Es gilt $\mu_{a,K} = \mu_{m_a} = \chi_{m_a}$. Wenn $d = \deg(\mu_{a,K})$, so ist $\left(1, \dots, a^{d-1}\right)$ eine K-Basis von $K[a]$.

Aufgabe 5. (Algebraischer Abschluss. 4 Punkte.)
Sei L/K eine Körpererweiterung. Der **algebraische Abschluss** von K in L sei definiert als
$$\mathrm{Alg}_L(K) := \{a \in L | a \text{ algebraisch über } K\}\,.$$
Zeige, dass $\mathrm{Alg}_L(K)$ ein Körper ist.

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Dienstag, 25.10.2016, 12:00 Uhr in den Kasten mit der Aufschrift "*HIER auch Abgabe von ÜBUNGEN für VORLESUNGEN von Prof. Barakat*" ein. Dieser befindet sich im ENC, 2. Etage, am Zugang zum Gebäudeteil D. Bitte verseht eure Abgabe mit Namen und Matrikelnummer.