RWTH Aachen
Fachgruppe Mathematik
Mohamed Barakat und Sebastian Posur

Wintersemester 2015/16

6. Übungsblatt zur Vorlesung „Ebene Algebraische Kurven“

Wird besprochen am: 28. Januar, 14:15

Aufgabe 1 (Singuläre Kubiken)**.** Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Es sei $C = \mathcal{V}(x_0x_2^2 - 4x_1^3 + g_2x_0^2x_1 + g_3x_0^3)$ eine Kubik in Weierstraß Normalform. Für welche Wahlen von g_2, g_3 ist C eine Neilsche Parabel, und für welche ein Folium von Descartes?

Aufgabe 2 (Konfiguration)**.** Beweise Übung 3.1 der Vorlesung.

Aufgabe 3 (Hesse-Normalform)**.** Sei $C \subseteq \mathbb{P}^2$ eine Kubik gegeben in Hesse-Normalform $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 6mx_0x_1x_2$.

(a) Für welche Wahlen von m ist C glatt?
(b) Ist die Hesse-Normalform einer glatten Kubik eindeutig?
(c) Es seien σ, τ die Projektivitäten aus dem Beweis von Satz 3.10. Zeige: $H := \langle \sigma, \tau \rangle \cong C_3 \times C_3$ operiert scharftransitiv auf der Menge der 9 Wendepunkte $\{(0 : 1 : -\omega^i), (1 : -\omega^j : 0), (1 : 0 : -\omega^k) \mid i, j, k \in \{0, 1, 2\}\}$.
(d) Es sei $m = 0$. Bestimme die Automorphismengruppe G von C, d.h. die Gruppe derjenigen Projektivitäten, die C invariant lassen.
(e) Es sei $m = 0$. Werden alle Automorphismen der Wendepunktkonfiguration (d.h. alle bijektiven Selbstabbildungen der Menge der Wendepunkte, welche Inzidenzien erhalten) bereits durch Elemente von G induziert?

Aufgabe 4 (Gruppenstruktur auf Kubiken)**.** Zeige, dass Satz 3.11 auch dann gilt, wenn man sich auf die Menge aller glatten Punkte einer irreduziblen Kubik einschränkt.

Aufgabe 5 (Parametrisierung)**.** Bestimme analog zu Beispiel 3.14 eine Parametrisierung des Foliums.