RWTH Aachen
Fachgruppe Mathematik
Mohamed Barakat und Sebastian Posur

Wintersemester 2015/16

4. Übungsblatt zur Vorlesung „Ebene Algebraische Kurven“

Wird besprochen am: 10. Dezember, 14:15

Aufgabe 1 (Schnittmultiplizitäten). Für diese Aufgabe sei $K = \mathbb{C}$.

(a) Es sei $f = y^2 - x^3$. Finde alle Geraden L durch $x := (0, 0)$, sodass $i_x(L, \mathcal{V}(f))$ maximal ist.
(b) Es sei $g = y^2 - x^2(x + 1)$. Finde alle Geraden L durch $x := (0, 0)$, sodass $i_x(L, \mathcal{V}(g))$ maximal ist.

Freiwillig: Es seien F und G die Homogenisierungen von f und g. Die homogenen Koordinaten von x lauten nun $(0 : 0 : 1)$. Finde eine Projektivität $\pi : \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ dergestalt, dass $i_x(\mathcal{V}(F), \pi(\mathcal{V}(G))) = 5$ ist.

Aufgabe 2 (Schnittmultiplizitäten). Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Es seien $C_1 = \mathcal{V}(F)$, $C_2 = \mathcal{V}(G)$ Kurven in $\mathbb{P}^2(K)$ ohne gemeinsame Komponente. Weiter sei $\deg(F) \leq \deg(G)$, und $H \in K[x_0, x_1, x_2]$ homogen vom Grad $\deg(G) - \deg(F)$. Man zeige, dass für alle $x \in \mathbb{P}^2(K)$ gilt:

$$i_x(C_1, C_2) = i_x(C_1, \mathcal{V}(G + H \cdot F)).$$

Man bestimme nun die Schnittpunkte und Schnittvielfachheiten im Fall $K = \mathbb{C}$, $F = x_2^2 - x_0^2 + x_0x_1$, $G = x_2^6 - x_0^2x_2^4 + (x_0^4 + x_1^4)(x_2^2 - x_0^2 + x_0x_1)$.

Aufgabe 3 (Polare). Für eine algebraische Kurve $C = \mathcal{V}(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ und einen Punkt $q \in \mathbb{P}^2$ definieren wir die (höheren) Polare $P_q^n(C)$ von C bezüglich q induktiv: $P_q^0(C) := C$ und für $n > 0$ definiere $P_q^n(C) := P_q(P_q^{n-1}(C))$.
Konstruiere für jedes $d > 1$ eine irreduzible Kurve C von Grad d und einen Punkt $q \notin C$ dergestalt, dass ein glatter Punkt $x \in C$ existiert, der ebenfalls auf allen höheren Polaren $P_q^n(C)$ liegt für $n = 0, \ldots, d - 1$.

Aufgabe 4 (Polare). Es sei $K = \mathbb{C}$ und $C = \mathcal{V}(x_2^2x_0 - x_1^3 + x_1x_0^2)$. Bestimme $P_q(C)$ für $q = (1 : 0 : 0), (1 : \frac{1}{2} : 0), (1 : \frac{9}{10} : 0)$ und skizziere (reell) C und P_q im affinen Teil $x_0 = 1$.