RWTH Aachen
Fachgruppe Mathematik
Mohamed Barakat und Sebastian Posur

Wintersemester 2015/16

3. Übungsblatt zur Vorlesung „Ebene Algebraische Kurven“

Wird besprochen am: 26. November, 14:15

Aufgabe 1 (Resultanten)**.** Beweise Satz 2.6.

Aufgabe 2 (Resultanten)**.** Beweise Lemma 2.4 (a).

Aufgabe 3 (Geometrische Interpretation der Resultante)**.** Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ein Polynom $F \in K[x, y, z_0, z_1]$ heißt homogen in z_0, z_1, falls es aufgefasst als Polynom im Polynomring $K(x, y)[z_0, z_1]$ homogen ist.

(a) Definiere die zu F gehörige Nullstellenmenge $\mathcal{V}(F)$ als Teilmenge von $\mathbb{A}^2(K) \times \mathbb{P}^1(K)$.

(b) Es sei $G \in K[x, y, z_0, z_1]$ ein weiteres Polynom, homogen in z_0, z_1. Schreibe $F = \sum_{i=0}^{m} a_i z_0^i z_1^{m-i}$ und $G = \sum_{i=0}^{n} b_i z_0^i z_1^{n-i}$ mit Polynomen $f_i, g_i \in K[x, y]$. Definiere die Resultante $R_{F,G}$ von F und G als die Determinante der Sylvestermatrix

$$\mathrm{Syl}_{F,G} := \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & \\ & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & \\ & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Es sei $\pi : \mathbb{A}^2(K) \times \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{A}^2(K), (x, y, (z_0 : z_1)) \mapsto (x, y)$ die Projektion auf den affinen Anteil. Zeige: $\pi(\mathcal{V}(F, G)) = \mathcal{V}_{\mathbb{A}^2(K)}(R_{F,G})$.

Freiwillig: Erkläre den Beweis vom Satz von Bézout (Satz 2.8) mittels dieser geometrischen Interpretation der Resultante.

Aufgabe 4 (Schnittmultiplizitäten)**.** Konstruiere homogene, vielfachheitenfreie Polynome $F, G \in K[x_0, x_1, x_2]$ von Grad 2 für einen geeigneten algebraisch abgeschlossenen Körper K, sodass

(a) $\mathcal{V}(F)$, $\mathcal{V}(G)$ sich in genau einem Punkt schneiden.

(b) $\mathcal{V}(F)$, $\mathcal{V}(G)$ sich in genau zwei Punkten mit Schnittmultiplizitäten 2 schneiden.

(c) $\mathcal{V}(F)$, $\mathcal{V}(G)$ sich in genau zwei Punkten mit Schnittmultiplizitäten 1 und 3 schneiden.

(d) $\mathcal{V}(F)$, $\mathcal{V}(G)$ sich in genau drei Punkten schneiden.

(e) $\mathcal{V}(F)$, $\mathcal{V}(G)$ sich in genau vier Punkten schneiden.