RWTH Aachen
Fachgruppe Mathematik
Mohamed Barakat und Sebastian Posur

Wintersemester 2015/16

2. Übungsblatt zur Vorlesung „Ebene Algebraische Kurven“

Wird besprochen am: 12. November, 14:15

Aufgabe 1 (Hilbertscher Nullstellensatz)**.** In dieser Aufgabe beweisen wir den Hilbertschen Nullstellensatz. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Für eine Menge $M \subseteq K^n$ heißt $\mathcal{I}(M) := \{p \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid p(m) = 0 \ \forall m \in M\}$ das **Verschwindungsideal von** M**.** Für eine Menge von Polynomen $F \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ heißt $\mathcal{V}(F) := \{x \in K^n \mid p(x) = 0 \ \forall p \in F\}$ die **Verschwindungsmenge von** F. Der Hilbertsche Nullstellensatz lautet nun:

$$\text{Falls } F \subseteq K[x_1, \ldots, x_n], \text{so gilt } \mathcal{I}(\mathcal{V}(F)) = \sqrt{(F)},$$

wobei (F) das von F erzeugte Ideal bezeichnet und $\sqrt{(F)}$ das zugehörige Radikalideal (Erinnerung: $p \in \sqrt{(F)} \iff \exists n \in \mathbb{N} : p^n \in (F)$).
Den folgenden Satz setzen wir voraus: Sei k ein Körper und A eine endlich erzeugte k-Algebra. Falls A selbst ein Körper ist, so ist A eine endliche Körpererweiterung von k.
Zeige zuerst:

(a) Alle maximalen Ideale von $K[x_1, \ldots, x_n]$ sind von der Form $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, wobei $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$.
(b) Falls $\mathcal{V}(F) = \emptyset$, so gilt $(F) = K[x_1, \ldots, x_n]$ (Dies ist der sogenannte schwache Nullstellensatz).

Beweise nun den Hilbertschen Nullstellensatz.

Aufgabe 2 (Tangente)**.** Es sei $p \in K[x, y]$, $P \in K[x_0, x_1, x_2]$ die Homogenisierung von p, $C = \mathcal{V}(P)$ die projektive ebene algebraische Kurve zu P, $a \in C$ ein glatter Punkt mit affinen Koordinaten $(a_1, a_2) = a \in \mathbb{A}^2(K) \cap C$. Zeige: Die Homogenisierung von $p_x(a)(x - a_1) + p_y(a)(y - a_2)$ ist gegeben durch $P_{x_0}(a)x_0 + P_{x_1}(a)x_1 + P_{x_2}(a)$.

Aufgabe 3 (Schnittmultiplizität)**.** Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(a) Es sei $C = \mathcal{V}_K(P)$ eine projektive ebene algebraische Kurve, $L \not\subseteq C$ eine Gerade, $a \in L \cap C$. Zeige, dass die in Definition 1.17 eingeführte Schnittmultiplizität unabhängig von der Wahl einer Projektivität π ist, welche L in die Gerade $\{x_0 = 0\}$ überführt.
(b) Es sei $P = x_1^3 + x_2^3 - x_0x_1x_2 \in K[x_0, x_1, x_2]$, $C := \mathcal{V}_K(P)$. Dann ist $a := (0 : 1 : -1) \in C$. Zeige, dass $i_a(C, T_a(C)) = 3$ gilt.

Aufgabe 4 (Singularitäten)**.** Konstruiere Beispiele für die folgenden Situationen (d.h. wähle pro Aufgabenteil einen Körper K und geeignete Polynome).

(a) Zwei vielfachheitenfreie Polynome $f, g \in K[x, y]$, sodass $\mathcal{V}_K(f) = \mathcal{V}_K(g)$ gilt und ein Punkt $x \in \mathcal{V}_K(f)$ existiert, der aufgefasst als Punkt von $\mathcal{V}_K(f)$ singulär ist, aber aufgefasst als Punkt in $\mathcal{V}_K(g)$ regulär ist.
(b) Ein Polynom $f \in K[x, y]$, sodass jeder Punkt von $\mathcal{V}_K(f)$ singulär ist.
(c) Ein irreduzibles Polynom $f \in K[x, y]$, sodass jeder Punkt von $\mathcal{V}_K(f)$ singulär ist.