RWTH Aachen
Fachgruppe Mathematik
Mohamed Barakat und Sebastian Posur

Wintersemester 2015/16

1. Übungsblatt zur Vorlesung „Ebene Algebraische Kurven"

Wir besprochen am: 29. Oktober, 14:15

Aufgabe 1 (Unendlich ferne Punkte)**.** Es sei $K = \mathbb{R}$. Wir definieren die Abbildung

$$\iota_0 : \mathbb{A}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K) : (x, y) \mapsto (1 : x : y).$$

Bestimme für die unten stehenden Polynome $p \in K[x, y]$ und ihre Homogenisierungen $P \in K[x_0, x_1, x_2]$ die Mengen $\mathcal{V}(p), \iota_0(\mathcal{V}(p)), \mathcal{V}(P)$ und die Differenzmengen $\mathcal{V}(P) - \iota_0(\mathcal{V}(p))$.

(a) $p = x^2 + y^2 - 1$,
(b) $p = x^2 - y^2 - 1$,
(c) $p = y - x^2$.

Visualisiere alle auftretenden Mengen und gib eine Anschauung der Punkte in den Differenzmengen an.

Aufgabe 2 (Projektivitäten)**.** Sei $v = (x_0, x_1, x_2) \in K^3 - \{0\}$. Im Folgenden bezeichnen wir mit $[v] = (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(K)$ den zu v zugehörigen Punkt in der projektiven Ebene.
Zeige: Jede bijektive lineare Abbildung $\alpha : K^3 \to K^3$ induziert eine wohldefinierte bijektive Abbildung

$$\mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K) : (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto [\alpha((x_0, x_1, x_2))].$$

Bijektive Selbstabbildungen des $\mathbb{P}^2(K)$, welche durch eine lineare Abbildung induziert werden, heißen auch Projektivitäten. Es sei $K = \mathbb{R}$. Finde für jedes p aus Aufgabe 1 jeweils eine Projektivität $\pi : \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$, sodass $\pi \circ \iota_0(\mathcal{V}(p)) \subseteq \mathcal{V}(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2)$ gilt.

Aufgabe 3 (Singularitäten)**.** Es sei ι_0 die Abbildung aus Aufgabe 1. Für jede Projektivität $\pi : \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ nennen wir das Bild von $\pi \circ \iota_0$ einen affinen Teil von $\mathbb{P}^2(K)$ (welchen wir wieder mit $\mathbb{A}^2(K)$ identifizieren können). Sei $x \in C \subseteq \mathbb{P}^2(K)$ ein Punkt einer projektiven algebraischen Kurve. Zeige, dass *singulär sein* eine Eigenschaft von x ist, die unabhängig von der Wahl eines affinen Teils von $\mathbb{P}^2(K)$ ist, welcher x enthält (vgl. Definition 1.11).

Aufgabe 4 (Elliptische Kurven)**.** Es sei $K = \mathbb{R}$, $p = y^2 - x(x-1)(x+1)$ und P die Homogenisierung von p. Visualisiere $\mathcal{V}(P) \cap A$, wobei A gegeben ist durch den affinen Teil

(a) $\iota_0(\mathbb{A}^2(\mathbb{R}))$,
(b) $\{(x_0 : 1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0, x_2 \in \mathbb{R}\}$.