Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2013/14

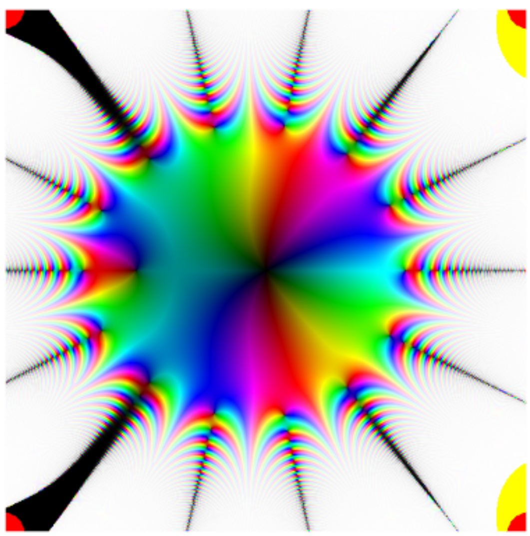
Mohamed Barakat

6. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie“

Abgabetermin: 29. Januar, 11:00.

Aufgabe 1. Für welche der folgenden Funktionsvorschriften ist $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität? Bestimme gegebenenfalls $\operatorname{ord}_0 f$:

(1) $f(z) = z^2 \cdot \log z$;
(2) $g(z) = \frac{\sin(z^6+z^7)}{e^{\cos(z^2)-1}-1}$;
(3) $h(z) = z^k \cdot e^{g(z)+\frac{1}{g(z)}}$ für $k \in \mathbb{Z}$ und g aus (b).



Zu welcher der obigen Funktionen gehört das folgende um 0 zentrierte farbige Bild? Lese die Ordnung bei 0 an den Farben ab.

Aufgabe 2. Seien $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige:

(1) Ist z_0 eine Polstelle von f, so ist z_0 eine Polstelle der Ordnung 1 von $\frac{f'}{f}$.
(2) Die Funktion $e^{f(z)}$ hat keine Polstelle in z_0.

Folgende Aufgabe ist eine freiwillige Zusatzaufgabe.

Aufgabe 3. Seien $z_1, \dots, z_n \in U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige: Ist kein z_i eine wesentliche Singularität und $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, so ist f eine rationale Funktion $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit zwei Polynomen p, q mit $\deg p < \deg q$.

Siehe nächste Seite

Aufgabe 4. Bestimme $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, d.h. die Menge aller holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit holomorphem Inversen f^{-1}.
Hinweis: Betrachte die isolierten Singularitäten der Funktion $f\left(\frac{1}{z}\right)$ und benutze den Satz von CASORATI-WEIERSTRASS.