Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2013/14

Mohamed Barakat

5. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie“

Abgabetermin: 15. Januar, 11:00.

Aufgabe 1. Beweise oder widerlege:

(1) Es gibt eine ganze Funktion f mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2+1}{n^3+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(2) Es gibt eine ganze Funktion f mit $f(n) = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(3) Es gibt eine nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Aufgabe 2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein x-achsensymmetrisches Gebiet, d.h. $z \in G \iff \overline{z} \in G$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Definiere für eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$f^* : G \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{f(\overline{z})}.$$

Zeige:

(1) f^* ist ebenfalls holomorph.
(2) $f(\mathbb{R} \cap G) \subset \mathbb{R} \iff f = f^*$.

Alle aus der reellen Analysis auf $\mathbb{C}$ fortgesetzten holomorphen Funktionen erfüllen die Bedingungen aus (b), etwa rationale Funktionen mit *reellen* Koeffizienten, exp, log, sin, cos, und Summen, Produkte, Quotienten und Verkettungen solcher Funktionen.

Wir wünschen Euch frohe Weihnachtstage und ein erfolgreiches neues Jahr.

Aufgabe 3.

(1) Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Bestimme den Konvergenzring der LAURENT-Reihe $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{|k|} z^k$. Für den Fall, daß der Konvergenzring nicht leer ist: Welche holomorphe Funktion wird durch $g(z)$ dargestellt?
(2) Bestimme die verschiedenen LAURENT-Entwicklungen der rationalen Funktion $f(z) = \frac{1}{z(1-z)(2-z)}$ auf den maximalen Konvergenzringen um $z_0 = 0$.