Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2013/14

Mohamed Barakat

4. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie“

Abgabetermin: 18. Dezember, 11:00.

Aufgabe 1.

(1) Bestimme das Wegintegral
$$\int_{|z-1|=3} \frac{\sin(z)}{(z+\pi)^a(z-\frac{\pi}{2})^b} dz.$$
für $a, b \in \mathbb{N}$.

(2) Bestimme den Konvergenzradius der TAYLOR-Reihe von $\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}$ um $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ bzw. $x_0 = 2$.
Hinweis: Was ist $\frac{x^5-1}{x-1}$?

(3) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) z^k$ wobei
$$\varphi(k) = |(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*| = |\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid \operatorname{ggT}(\ell, k) = 1\}|$$
die EULERsche φ-Funktion ist.

Aufgabe 2. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ definiere für $a \in \mathbb{C}$ die **komplexe Potenz**
$$z^a := e^{a \log z},$$
mit log aus Übung 3.4.
Beweise für $|z| < 1$ die **verallgemeinerte binomische Formel**
$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k,$$
wobei $\binom{a}{k} := \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$ der **verallgemeinerte Binomialkoeffizient** ist.

Aufgabe 3. Sei f eine ganze Funktion, $n \in \mathbb{N}_0$ und $r, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ Konstanten derart, daß $|f(z)| \leq c|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$. Zeige: f ist ein Polynom vom Grad höchstens n.

Aufgabe 4. Das Bild einer ganzen nicht konstanten Funktion f ist dicht in $\mathbb{C}$ (d.h. $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$).