TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2013/14

Mohamed Barakat

3. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie“

Abgabetermin: 4. Dezember, 11:00.

Aufgabe 1. Sei $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $1 \in G$. Zeige:

(1) Es gibt genau eine Stammfunktion von $f(z) = \frac{1}{z}$, die bei 1 den Wert 0 annimmt. Wie hängt diese Stammfunktion mit der Logarithmusfunktion aus Übung 3.4 zusammen?
(2) Es gibt genau eine Wurzelfunktion auf G, d.h. genau eine stetige Funktion $W : G \to \mathbb{C}$ mit $W(z)^2 = z$ für alle $z \in G$, die bei 1 den Wert 1 annimmt. Wir schreiben $\sqrt{z} := W(z)$.
(3) Die Wurzelfunktion erfüllt i.A. nicht $\sqrt{zw} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$ für alle $z, w \in G$ mit $zw \in G$. Es gilt aber $\sqrt{zw} = \pm\sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$.
(4) Es existiert keine stetige Wurzelfunktion auf ganz $\mathbb{C}$.
(5) Wo ist der Fehler beim vermeintlichen Widerspruch

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = 1 \text{ (?)}$$

Aufgabe 2. Bestimme die Wegintegrale

$$\int_{|z-1|=3} \frac{\sin(z)}{(z+\pi)(z-\frac{\pi}{2})} dz, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{1/\zeta}{\zeta - z} d\zeta.$$

Wann ist die CAUCHYsche Integralformel anwendbar? Kann man bei der CAUCHYschen Integralformel auf der Holomorphie im Inneren von $B_r(z_0)$ verzichten?

Aufgabe 3. Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}^3$ und $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \partial B_1(0)$. Zeige: Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f_{|S^1} = g_{|S^1}$.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeige: Hat $\operatorname{Re} f$ (bzw. $\operatorname{Im} f$) an $z_0 \in U$ ein lokales Maximum, so ist f auf einer Umgebung von z_0 konstant.