Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2013/14

Mohamed Barakat

2. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie“

Abgabetermin: 20. November, 11:00.

Aufgabe 1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ eine auf U holomorphe Funktion. Zeige: Erfüllt f eine der folgenden Bedingungen, so ist f konstant:

(1) $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$.
(2) f ist reellwertig, d.h. $f(U) \subset \mathbb{R}$.
(3) $|f(z)| = 1$ für alle $z \in U$ (diese Teilaufgabe brauchen wir beim Beweis des Maximumsprinzips (Satz 5.2.2)).

Aufgabe 2. Beweise Proposition 3.2.3. Belege die Unterschiede zu den Propositionen 3.1.7 und 3.1.9 anhand von Beispielen.

Aufgabe 3.

(1) Berechne die Wegintegrale

$$\int_\gamma z e^{\frac{i\pi z^2}{2}} \cos e^{\frac{i\pi z^2}{2}} dz \quad \text{und} \quad \int_\gamma \overline{z}^2 dz$$

entlang einer geraden Strecke γ von i nach 1.
(2) Besitzt die stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}^2$ eine Stammfunktion?

Aufgabe 4. Siehe zweite Seite.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweise (ohne Benutzung der Homotopieinvarianz) folgende Korollare des CAUCHYschen Integralsatzes.

(1) Seien α, β Wege in U *mit gleichen Anfangs- und Endpunkten*, die mitsamt ihrer Verbindungsstrecken in U liegen, dann gilt
$$\int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz.$$

(2) Seien α, β *geschlossene* Wege in U, die mitsamt ihrer Verbindungsstrecken in U liegen, dann gilt
$$\int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz.$$

(3) (**CAUCHYscher Integralsatz für Kreisringe**) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und liegt der Kreisring $\{z \mid r \leq |z - z_0| \leq R\}$ in U, so gilt
$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz = \int_{|z-z_0|=R} f(z)dz.$$

(4) (**CAUCHYscher Integralsatz für Kreisscheiben**) Sei $z_0 \in U$ und liegt die Kreisscheibe $\overline{B_R(z_0)} = \{z \mid |z - z_0| \leq R\}$ in U, so gilt
$$\int_{|z-z_0|=R} f(z)dz = 0.$$