Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2013/14

Mohamed Barakat

1. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie“

Abgabetermin: 6. November, 11:00.

Aufgabe 1.

(1) Bestimme alle komplexen Wurzeln des Polynoms $t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 \in \mathbb{C}[t]$.
(2) Bestimme den Betrag, Realteil und Imaginärteil von $\frac{\sqrt{5}-i}{\sqrt{5}+i}$.
(3) Berechne $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{1003}$.

Aufgabe 2.

(1) Zeige unter Zuhilfenahme von Definition 2.1.1, daß
$$f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2(i-z)^{-1}$$
auf $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ holomorph ist.
(2) Zeige, daß
$$q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z\overline{z}$$
auf ganz $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ (reell) total differenzierbar, aber nur in $z = 0$ komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion mit $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Zeige: Ist f auf U holomorph und zweimal stetig reell differenzierbar[1], so sind u und v **harmonische Funktionen**, d.h. sie erfüllen die **Laplace Differentialgleichung**
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Aufgabe 4. Gebe an für welche $a, b \in \mathbb{R}$ das Polynom $x^2 + 2axy + by^2$ Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ ist. Bestimme für jedes solche Paar (a, b) all diese holomorphen Funktionen.

[1] Die zweimalige stetige Differenzierbarkeit folgt bereits aus der Holomorphie, aber das werden wir erst später sehen.