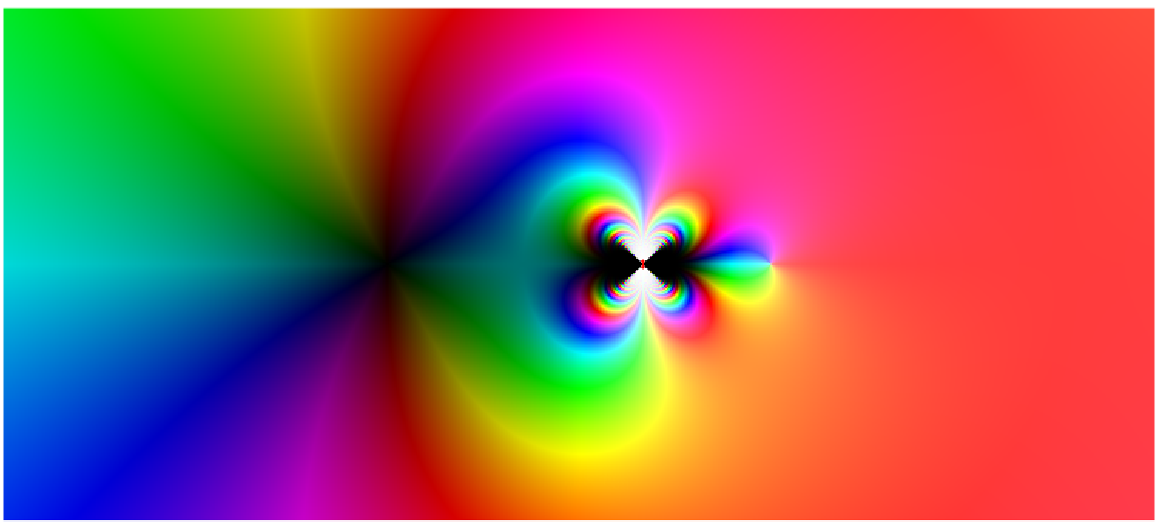
Einführung in die Funktionentheorie

Vorlesungsskript (2 SWS)
WS 2013/14

Mohamed Barakat

Fakultät für Mathematik, Universität Kaiserslautern, 67653 Kaiserslautern
barakat@mathematik.uni-kl.de



$$f(z) = \frac{(z+2)^2 \exp(-1/z^2)}{z-1}$$

```
sage: f(z) = (z+2)^2 * exp(-1/z^2) / (z-1)
sage: complex_plot(f,(-5, 4),(-2, 2),axes=false,plot_points=500,figsize=[10,10])
```

(Worksheet öffentlich zugänglich unter `http://sagenb.org/home/pub/3911`)

Technische Universität Kaiserslautern

Vorwort

Ich möchte mich bei den Zuhörern der Vorlesung für die aktive Mitwirkung herzlich bedanken. Insbesondere bei Michael Ehmann und Philipp Blandfort, die diverse (Tipp)fehler im Skript entdeckt haben. Besonderer Dank gilt meiner Kontaktstudentin Friederike Laus für ihre Mühe und ihr konstruktives Feedback.

Für Korrektur- und Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar
barakat@mathematik.uni-kl.de

URL: `http://www.mathematik.uni-kl.de/~barakat/Lehre/WS13/Funktionentheorie/Skript/Funktionentheorie.pdf`

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Komplexe Zahlen

1.1. Der Körper der komplexen Zahlen

Wir fangen mit der üblichen, aber zunächst unmotivierten Definition der komplexen Zahlen an.

Definition 1.1.1. Der 2-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum[1] $\mathbb{R}^2$ zusammen mit den Verknüpfungen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad \text{(als Addition)}$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \qquad \text{(als Multiplikation)}$$

ist ein Körper, der sogenannte **Körper der komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$.

- Elemente der Form $(x, 0)$ nennt man **reell**, und kürzt sie mit x ab.
- Reelle Elemente bilden einen Unterkörper (x-Achse), den man mit $\mathbb{R}$ identifiziert.
- Das Element $i := (0, 1)$ heißt **imaginäre Einheit**. Es gilt $i^2 = -1$.
- Elemente der Form $(0, y) = iy$ heißen **rein imaginär** (y-Achse).
- Wegen
$$(x, y) = x + iy$$
nennt man $x =: \mathrm{Re}(x+iy)$ den **Realteil**[2] und $y =: \mathrm{Im}(x+iy)$ den **Imaginärteil**[3] der komplexen Zahl $z = x + iy$.
- Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung
$$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z = x + iy \mapsto \overline{z} := x - iy$$
nennt man die **komplexe Konjugation** und $\overline{z}$ die **komplex-konjugierte** zu z. Geometrisch entspricht sie einer Spiegelung an der x-Achse entlang der y-Achse.
- Die nicht-negative Funktion
$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ z = x + iy \mapsto |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$
nennt man die **Betragsfunktion** und $|z|$ den **Betrag** von z.

Da in diesem Model $\mathbb{C}$ mit der reellen Ebene identifiziert wird, spricht man daher manchmal von der **Gaussschen Zahlenebene**. Auf dieser Ebene konnte Gauss auf die bislang so mysteriöse imaginäre Einheit i mit dem Finger zeigen.

Bemerkung 1.1.2. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

[1] genauer, $\mathbb{R}^{1\times 2}$.

[2] auch x-Koordinate oder reelle Koordinate genannt

[3] auch y-Koordinate oder imaginäre Koordinate genannt

(a) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
(b) $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z+w}$ und $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$ (sprich die komplexe Konjugation ist ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$).
(c) $\overline{z} = z \iff z$ ist reell $\iff \operatorname{Re} z = z \iff \operatorname{Im} z = 0$ (insbesondere ist die komplexe Konjugation ein $\mathbb{R}$-linearer Automorphismus, welches nicht $\mathbb{C}$-linear ist).
(d) $\overline{\overline{z}} = z$ (d.h. die komplexe Konjugation ist ein Automorphismus der Ordnung 2).
(e) Die Betragsfunktion stimmt mit der Euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^2$ überein. Insbesondere gilt die Δ-Ungleichung $|z+w| \leq |z| + |w|$.
(f) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ (somit ist die Betragsfunktion eine Banachnorm der $\mathbb{R}$-Banach-algebra $\mathbb{C}$).
(g) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.
(h) $|z|^2 = z\overline{z}$ und $|z| = |\overline{z}|$.
(i) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ (ausgeschrieben, $(x+iy)^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$).

Wir wollen so tun, als hätten wir die Körper-Axiome von $\mathbb{C}$ klein-klein nachgewiesen. Insbesondere ist $\mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra[4]. Eine motivierte Definition der komplexen Zahlen liefert die Algebra: Man wünscht sich einen Körper, in dem das univariate Polynom $t^2+1 \in \mathbb{R}[t]$ eine Wurzel hat. Der Weihnachtsmann heißt hier Leopold Kronecker. Seine Konstruktion ist in folgender freiwilligen Übungsaufgabe beschrieben.

Übung 1.1.
(a) Der durch $t \mapsto i$ eindeutig definierte $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismus $\mathbb{R}[t] \to \mathbb{C}$ induziert einen $\mathbb{R}$-Algebrenisomorphismus
$$\mathbb{R}[t]/\langle t^2+1 \rangle \to \mathbb{C}.$$
(b) Leite durch Rechnen im Restklassenring $\mathbb{R}[t]/\langle t^2+1 \rangle$ die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen (Definition 1.1.1) her.

Hinweis zu (a): Bitte keine Algebrenhomomorphismus-Axiome nachweisen. Benutze nur, daß $\mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra ist.

Die folgende freiwillige Übungsaufgabe liefert ein weiteres algebraisches Model der komplexen Zahlen, das uns bei der komplexen Differenzierbarkeit wieder begegnen wird.

Übung 1.2. Bezeichne mit $\mathbb{R}^{2\times 2}$ die $\mathbb{R}$-Algebra der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$.
(a) Der durch $t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ eindeutig definierte $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismus $\mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ induziert einen $\mathbb{R}$-Algebrenmonomorphismus
$$\mathbb{R}[t]/\langle t^2+1 \rangle \to \mathbb{R}^{2\times 2}.$$
(b) Beschreibe das Bild als $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
(c) Was besagt der obige Monomorphismus für das Produkt von zwei Matrizen aus dem Bild?

[4]Erinnerung: Sei K ein Körper. Eine K-Algebra A ist ein Ring, der mit seiner Addition ein K-Vektorraum ist, und dessen Multiplikation K-bilinear ist, d.h. $r(ab) = (ra)b = a(rb)$ für alle $r \in K$ und $a, b \in A$.

Definition 1.1.3. Für eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiere die Funktionen $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\overline{f}$, bzw. $|f|$ durch Komposition von f mit $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, bzw. $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

1.2. $\mathbb{C}$ als metrischer Raum

Die obige Identifikation $(\mathbb{C}, |\cdot|) \equiv (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ erlaubt uns die aus den Grundlagen der Mathematik bekannten topologischen Begriffe aus der 2-dimensionalen Analysis (wie etwa Umgebung, offen, abgeschlossen, zusammenhängend, Konvergenz von Folgen und Reihen, absolute Konvergenz von Reihen, Umordnungssatz, Stetigkeit, stetige Fortsetzbarkeit, Folgenkriterium für Stetigkeit) auf $\mathbb{C}$ zu übertragen (siehe [**Gat09**, 1.6, 1.7(a), 2.1, 2.2, 2.3]).

Bei Kriterien und Sätzen, in die zusätzlich die multiplikative Struktur des Körpers eingeht, wie etwa beim Quotienten- bzw. Wurzelkriterium, müßte man sie streng genommen für $\mathbb{C}$ nochmal beweisen. Es stellt sich aber heraus, daß die Beweise aus der reellen Analysis sich nahezu Wort für Wort übertragen lassen. Damit wir das einmal sehen, behandeln wir folgende Aufgabe in der Präsenzübung.

Übung 1.3. Formuliere und beweise

(a) den Produkt- und den Quotientensatz für komplexe Folgen.
(b) das Quotienten- und das Wurzelkriterium für komplexe Reihen.

Komplexwertige Funktionen können als Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden. Es folgt sofort, daß eine komplexwertige Funktion stetig ist, wenn Ihr Real- *und* Imaginärteil stetig sind. Daraus und aus der letzten Übungsaufgabe sehen wir

Beispiel 1.2.1.

(a) Die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ ist stetig.
(b) Rationale Funktionen in z und $\overline{z}$ sind stetig.
(c) Kompositionen komplexwertiger stetiger Funktionen sind stetig.

1.3. Die Exponentialfunktion

Die **Exponentialreihe**

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

konvergiert[5] für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut. Das beweist man für $z \neq 0$ mit dem Quotientenkriterium. Für $z = 0$ ist die Aussage trivial. Die Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

[5] e^z ist zunächst nur ein Symbol und keine Potenz.

nennt man die **Exponentialfunktion**. Sie ist stetig da sie auf jeder Kreisscheibe vom Radius $r > 0$ (ein festes solches r reicht, etwa $r = 1$)

$$B_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\}$$

Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge[6] stetiger Polynomfunktionen ist.

Eine definierende Eigenschaft der Exponentialfunktion ist ihre **Funktionalgleichung**

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w).$$

Diese Gleichung wurde in der Grundlagenvorlesung mit Hilfe des CAUCHYschen Produktsatzes für absolut konvergente Reihen bewiesen.

Lemma 1.3.1. *Für eine komplexe Funktionen, die durch eine Potenzreihe mit* reellen Koeffizienten $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_k z^k$ *definiert wird, gilt*

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z}).$$

BEWEIS.

$$\overline{f(z)} = \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_k z^k} \overset{1.2.1.(a)}{=} \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{i=0}^{n} a_k z^k} \overset{1.1.2.(b)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \overline{a_k}\, \overline{z}^k \overset{1.1.2.(c)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_k \overline{z}^k = f(\overline{z})$$

□

Korollar 1.3.2.
(a) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(b) $|e^{i\varphi}| = 1$ *für alle* $\varphi \in \mathbb{R}$.

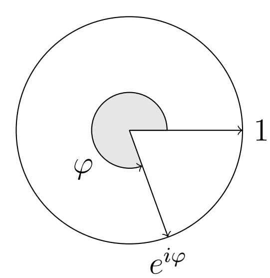
BEWEIS. (a) ist ein Spezialfall des Lemmas.
(b) folgt wegen $\overline{e^{i\varphi}} = e^{\overline{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$ aus $|e^{i\varphi}|^2 = e^{i\varphi}\overline{e^{i\varphi}} = e^{i\varphi}e^{-i\varphi} = e^{i\varphi - i\varphi} = e^0 = 1$. □

1.4. Polardarstellung und die geometrische Interpretation der Multiplikation

In der Grundlagenvorlesung definierte man für ein *reelles* φ

$$\cos\varphi := \operatorname{Re} e^{i\varphi} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi := \operatorname{Im} e^{i\varphi} = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$



Somit gilt die (spezielle) **EULERsche Formel**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \text{für } \varphi \in \mathbb{R}.$$

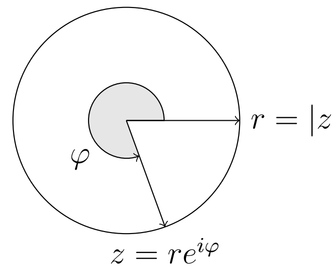
Wir interpretierten daher die reelle Zahl φ als der zwischen den Zahlenvektoren 1 und $e^{i\varphi}$ in der komplexen Zahlenebene eingeschlossene Winkel.

[6]Dies beschreibt den Begriff „**lokal gleichmäßig konvergente Funktionenfolge**“.

Allgemeiner können wir für eine komplexe Zahl vom Betrag $r = |z|$ schreiben

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

wobei $\varphi \in [0, 2\pi)$ der zwischen den Zahlenvektoren 1 und $e^{i\varphi}$ eingeschlossene Winkel ist.



Die eindeutige Zahl $\varphi \in [0, 2\pi)$ nennt man daher den **Winkel** oder das **Argument** von z. Oft wird sie mit $\arg z$ bezeichnet. Die Zahlen r und φ heißen die **Polarkoordinaten** von z.

Die Multiplikation komplexer Zahlen nimmt in der Polardarstellung eine besonders einfache Form an. Für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ folgt aus der Funktionalgleichung

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Also werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert (und evtl. anschließend modulo 2π reduziert). Geometrisch entspricht die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$ einer **Drehstreckung**; eine Streckung um den Faktor r und eine Drehung um den Winkel φ. Insbesondere entspricht die Multiplikation mit $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ einer (starren) Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$.

Übung 1.4. Skizziere für die Funktionen $f(z) = z^3$ und $f(z) = \frac{1}{z}$

(a) das zugehörige Vektorfeld (als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$).
(b) die Bilder der Achsenparallelen und der Kreisränder $\partial B_r(z)$.

Aus der Funktionalgleichung folgert man die **Moivresche Formel** für $z = |z|e^{i\varphi}$

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Übung 1.5.

(a) Bestimme alle komplexen Wurzeln des Polynoms $t^n - 1 \in \mathbb{C}[t]$.
(b) Bestimme den Betrag und den Winkel der komplexen Zahl $\zeta_3 := \frac{-1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
(c) Berechne $\zeta_3^{12345678}$.

Übung 1.6.

(a) Bestimme alle komplexen Wurzeln des Polynoms $t^4 - t^2 + 1 \in \mathbb{C}[t]$.
(b) Bestimme den Betrag, Realteil und Imaginärteil von $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$.
(c) Berechne $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1001}$.

Übung 1.7. Zeige, daß die Exponentialfunktion

$$\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$$

ein Gruppenepimorphismus von der additiven Gruppe auf die multiplikative Gruppe des Körpers $\mathbb{C}$ ist.

1.5. Sinus und Kosinus

Definition 1.5.1. Definiere analog zum reellen Fall die komplexen Potenzreihen

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Die absolute Konvergenz in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ folgt aus der von e^z, z.B. mit Hilfe des Majorantenkriteriums. Vollständig analog zum reellen Fall beweist man die allgemeine **EULERsche Formel**:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

BEWEIS. Aus $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ folgt

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Wende nun $\lim_{n\to\infty}$ auf beide Seiten an. □

Übung 1.8. Zeige oder widerlege:

(a) $\cos(-z) = \cos z$ und $\sin(-z) = -\sin z$.
(b) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ und $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.
(c) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
(d) $|\cos z| \leq 1$.

Übung 1.9. Skizziere für die Funktionen $\cos z$ das zugehörige Vektorfeld und die Bilder der Achsenparallelen und der Kreisränder $\partial B_r(z)$.

```
sage: complex_plot( z, (-2, 2), (-2, 2), plot_points=500, figsize=[5,5] )
```

Wir ordnen den komplexen Zahlen wie folgt Farben zu:
Rot bis violett entspricht dem Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ und die Helligkeit dem Betrag $|z|$.
Insbesondere ist 0 schwarz und ∞ weiß.

Ende
Vorl. 1

KAPITEL 2

Holomorphe Funktionen

2.1. Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie

Definition 2.1.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **komplex differenzierbar** in $z_0 \in \mathbb{C}$, falls der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{\substack{z \to z_0, \\ z \in U \setminus \{z_0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ heißt dann die **Ableitung** von f in z_0. f heißt **holomorph** auf U, falls es für alle $z_0 \in U$ komplex differenzierbar ist. Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion nennt man **ganz**.

Beispiel 2.1.2. Wir betrachten zwei einfache Beispiele.

(a) Die Identitätsfunktion $f(z) = z$ ist ganz mit

$$f'(z_0) := \lim_{\substack{z \to z_0, \\ z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{z \to z_0, \\ z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}}} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1 \text{ für alle } z_0 \in \mathbb{C}.$$

(b) Dagegen ist die komplexe Konjugation $g(z) = \overline{z}$ nirgends komplex differenzierbar: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir betrachten den Grenzwert des Differenzenquotienten in horizontaler

$$\lim_{\substack{t \to 0, \\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}} \frac{\overline{z_0 + t} - \overline{z_0}}{(z_0 + t) - z_0} = \frac{t}{t} = 1$$

bzw. vertikaler Richtung

$$\lim_{\substack{t \to 0, \\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}} \frac{\overline{z_0 + it} - \overline{z_0}}{(z_0 + it) - z_0} = \frac{-it}{it} = -1$$

und folgern, daß $f'(z_0)$ nicht existiert.

Übung 2.1.

(a) Zeige unter Zuhilfenahme von Definition 2.1.1, daß

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2(i - z)^{-1}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ holomorph ist.

(b) Zeige, daß
$$q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z\overline{z}$$
auf ganz $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ (reell) total differenzierbar, aber nur in $z = 0$ komplex differenzierbar ist.

Wörtlich wie im Reellen beweist man:

Satz 2.1.3. *Mit den offensichtlichen Voraussetzungen an komplex differenzierbaren Funktionen gelten folgende Regeln für die komplexe Ableitung*

(a) ***Linearitätsregel:*** $(af + bg)' = af' + bg'$ *für alle* $a, b \in \mathbb{C}$.
(b) **Leibniz*regel*:** $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
(c) ***Quotientenregel:*** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
(d) ***Kettenregel:*** $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

Insbesondere sind komplexe Linearkombinationen, Produkte, Quotienten und Verkettungen holomorpher Funktionen wieder holomorph.

Daraus folgt:

Beispiel 2.1.4. Rationale Polynomfunktionen in z sind auf ihrem Definitionsbereich holomorph.

2.2. Kriterien für die komplexe Differenzierbarkeit

Um uns das Leben zu erleichtern, wollen wir im Folgenden effiziente Kriterien für die komplexe Differenzierbarkeit formulieren und beweisen. Wir fangen mit einer einfachen Beobachtung an.

Bemerkung 2.2.1. Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn es eine komplexe Zahl w gibt mit $\psi(z) = zw$.

Beweis. Beide Richtungen sind triviale Aussagen der linearen Algebra. Aus der $\mathbb{C}$-Linearität $\psi(z) = \psi(z \cdot 1) = z\psi(1)$ folgt $w = \psi(1)$. $\square$

Mit dieser Bemerkung sind wir in der Lage ein erstes Kriterium für die komplexe Differenzierbarkeit zu beweisen. Dieses Kriterium beschreibt den Zusammenhang zwischen der komplexen und der (reellen) totalen Differenzierbarkeit. Dabei heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ($U \subset \mathbb{C}$ offen) total differenzierbar in $z_0 \in U$, falls es eine (und dann nur eine) $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\psi_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt so, daß die Differenzfunktion
$$\delta(h) := f(z_0 + h) - f(z_0) - \psi_{z_0}(h)$$
$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}\setminus\{0\}}} \frac{\delta(h)}{|h|} = 0$ erfüllt. Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\psi_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nennt man die **lineare Approximation** von f an z_0.

Satz 2.2.2. *Seien* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Für eine Funktion* $f : U \to \mathbb{C}$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) f *ist in* z_0 *komplex differenzierbar mit komplexer Ableitung* $f'(z_0)$.

(b) f ist in z_0 total differenzierbar und die lineare Approximation $\psi_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear[1].

In diesem Fall ist ψ_{z_0} gegeben durch die Multiplikation mit der komplexen Zahl $f'(z_0)$.

Beweis. $(a) \implies (b)$. Definiere $\psi_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, h \mapsto f'(z_0)h$. Dann ist[2]

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{|f(z_0+h) - f(z_0) - \psi_{z_0}(h)|}{|h|} &= \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - f'(z_0)h}{h} \right| \\ &= \left| \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right) \right| \\ &= 0.\end{aligned}$$

$(b) \implies (a)$. Wegen Bemerkung 2.2.1 existiert ein $w \in \mathbb{C}$ mit $\psi_{z_0}(h) = wh$. Dann gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\psi_{z_0}(h)}{h} + \frac{\delta(h)}{h} \right) = w + \lim_{h\to 0} \left(\frac{\delta(h)}{h} \right) = w.$$

Dabei benutzen wir, daß $\lim_{h\to 0} \frac{\delta(h)}{|h|} = 0 \iff \lim_{h\to 0} \frac{\delta(h)}{h} = 0$. □

Dieses Kriterium ist koordinatenunabhängig. Benutzt man die komplexen Zahlen $1 = (1,0)$ und $i = (0,1)$ als Standardbasis von $\mathbb{C}$ als 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, so lassen sich die obigen Aussagen in Koordinaten wir folgt schreiben:

Bemerkung 2.2.3. Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn ihre Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bezüglich der Standardbasis $(1,i)$ die Form

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

annimmt.

Beweis. Nach Bemerkung 2.2.1 entspricht ψ der Multiplikation mit einer komplexen Zahl $w = a+ib$ mit $a = \operatorname{Re} w$ und $b = \operatorname{Im} w$. Die Basis $(1,i)$ wird unter ψ auf $(\psi(1), \psi(i)) = (1\cdot w, i \cdot w) = (a+ib, -b+ia)$ abgebildet. Somit ergibt sich die Abbildungsmatrix aus der Behauptung. □

Die Matrix der linearen Approximation ψ_{z_0} (von f an z_0) bezüglich der Standardbasis $(1,i)$ vom $\mathbb{R}^2$ ist die **Jacobimatrix** $Df(z_0)$. Wir wissen, daß ihre Einträge genau die partiellen Ableitungen nach den Standardkoordination sind. Ist $f(z) = u(z) + iv(z)$ mit reellen Funktionen $u(z) = u(x,y)$ und $v(z) = v(x,y)$, dann ist

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}.$$

Satz 2.2.2 läßt sich nun in Koordinaten so formulieren:

[1] Und nicht bloß nur $\mathbb{R}$-linear.

[2] Wir benutzen $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$.

Satz 2.2.4. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Für eine Funktion $f := u + iv : U \to \mathbb{C}$ mit $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ sind folgende Aussage äquivalent:*

(a) f ist in z_0 komplex differenzierbar mit komplexer Ableitung $f'(z_0)$.
(b) f ist in z_0 total differenzierbar und die partiellen Ableitungen erfüllen die **Cauchy-Riemann** ***Differentialgleichung***:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = 0.$$

In diesem Fall gilt $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Bemerkung 2.2.3 angewandt auf die Jacobimatrix. □

Beispiel 2.2.5. Die komplexe Differenzierbarkeit läßt sich also bei gegebener totalen Differenzierbarkeit an der Form der Jacobimatrix (in den Standardkoordinaten) ablesen.

(a) Die Identitätsabbildung $f(z) = z = x + iy$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit Jacobimatrix
$$Df(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
und komplexer Ableitung $f'(z) = 1$.

(b) Die komplexe Konjugation $g(z) = \overline{z} = x - iy$ ist nirgends komplex differenzierbar mit Jacobimatrix
$$Dg(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Exponentialfunktion $\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$ ist ganz mit Jacobimatrix
$$D\exp(z) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$
und komplexer Ableitung $\exp' = \exp$.

Beispiel 2.2.6. Aus den Regeln der komplexen Ableitung erhalten wir weitere Beispiele.

(a) Die Funktion $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ ist ganz mit Ableitung
$$\cos' z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})' = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z.$$

(b) Die Funktion $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ ist ganz mit Ableitung
$$\sin' z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})' = \frac{1}{2i}(ie^{iz} + ie^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z.$$

Übung 2.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion mit $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Zeige: Ist f auf U holomorph und zweimal stetig reell differenzierbar[3], so sind u und v **harmonische Funktionen**, d.h. sie erfüllen die **Laplace Differentialgleichung**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Übung 2.3. Gebe an für welche $a, b \in \mathbb{R}$ das Polynom $x^2+2axy+by^2$ Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ ist. Bestimme für jedes solche Paar (a, b) all diese holomorphen Funktionen.

Übung 2.4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ eine auf U holomorphe Funktion. Zeige: Erfüllt f eine der folgenden Bedingungen, so ist f konstant:

(a) $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$.
(b) f ist reellwertig, d.h. $f(U) \subset \mathbb{R}$.
(c) $|f(z)| = 1$ für alle $z \in U$.

Das bisherige Vorgehen hat mindestens zwei Nachteile. Komplexwertige Funktionen werden typischerweise in Abhängigkeit von z und/oder $\overline{z}$ geschrieben, wie etwa $\cos \frac{z+1}{z\overline{z}}$ (d.h. weder in Abhängigkeit von x, y geschrieben noch in Real- und Imaginärteil u, v unterteilt). Wir wünschen uns daher ein Kalkül, das uns in die Lage versetzt direkt mit z und $\overline{z}$ zu rechnen, als wären sie unabhängige Koordinaten. Motiviert durch die Gleichungen $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ rechnen wir mit der formalen Kettenregel nach:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Definition 2.2.7. Die formalen Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

nennt man die **Wirtinger-Ableitungen**. Genauer, sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ eine auf U partiell differenzierbare Funktion mit Realteil $u = \operatorname{Re} f$ und Imaginärteil

[3]Die zweimalige stetige Differenzierbarkeit folgt bereits aus der Holomorphie, aber das werden wir erst später sehen.

$v = \operatorname{Im} f$. Definiere

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right). \tag{2}$$

Der wahre Wert der Wirtinger-Ableitungen liegt nicht in ihren Definitionen, sondern vielmehr in ihren Rechenregeln, die wir jetzt auflisten.

Satz 2.2.8. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige* total *differenzierbare Funktion.*

(a) f ist genau dann komplex differenzierbar in $z_0 \in U$, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$$

In diesem Fall gilt

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

(b) Es gilt $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$ und $\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0$. D.h. bezüglich der Wirtinger-*Ableitungen verhalten sich z und $\overline{z}$ wie unabhängige Variablen.*

(c) Die Wirtinger-*Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ erfüllen die Linearitätsregel, die* Leibniz*regel, und die Quotientenregel. Genauer, mit den offensichtlichen Voraussetzungen für total differenzierbare Funktionen f, g gilt*

- *Linearitätsregel: $\frac{\partial}{\partial z}(af + bg) = a\frac{\partial f}{\partial z} + b\frac{\partial g}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(af + bg) = a\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + b\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.*
- Leibniz*regel: $\frac{\partial}{\partial z}(fg) = \frac{\partial f}{\partial z}g + f\frac{\partial g}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}g + f\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}$.*
- *Quotientenregel: $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}g - f\frac{\partial g}{\partial z}\right)/g^2$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}g - f\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\right)/g^2$.*

Beweis. (a) Die Formel (2) besagt, daß f genau dann die Cauchy-Riemann Differentialgleichung in z_0 erfüllt, wenn $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$ verschwindet. In diesem Fall vereinfacht sich (1) zu $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = f'(z_0)$, nach Satz 2.2.4.
(b) und (c) ergeben sich durch Nachrechnen. □

Beispiel 2.2.9.

(a) $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \operatorname{Re} z = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) = \frac{1}{2}$, nirgends 0.
(b) $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \operatorname{Im} z = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) = \frac{i}{2}$, nirgends 0.
(c) $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}|z|^2 = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(z\overline{z}) = z$, verschwindet nur bei 0.

Übung 2.5. Bestimme in welchen Punkten die rationale Funktion

(a) $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$
(b) $\frac{2z+\overline{z}}{|z|^2}$

komplex differenzierbar ist und berechne gegebenenfalls ihre Ableitung.

Ende Vorl. 2

KAPITEL 3

Wegintegrale

Die Wegintegration in der Funktionentheorie ist eine interessante Mischung zwischen der 1-dimensionalen Integration

$$\int_I f(x)dx$$

und der Wegintegration

$$\int_\gamma v := \int_I \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

in der mehrdimensionalen reellen Analysis. Dabei spielt die Multiplikation komplexer Zahlen eine entscheidende Rolle. Das Ergebnis ist wieder eine komplexe Zahl.

3.1. Wege und ihre Bogenlänge

Zunächst fangen wir mit der Definition eines Weges an. Im Folgenden bezeichne

$$I := [a, b] \subset \mathbb{R}$$

ein kompaktes reelles Intervall.

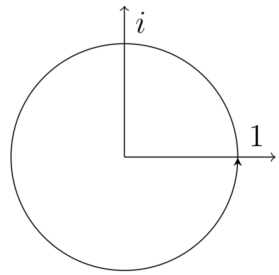
Definition 3.1.1. Unter einem **Weg** verstehen wir eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{C}$. Der Weg γ heißt

- **geschlossen** falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist, sonst **offen**.
- **stückweise stetig differenzierbar**, wenn es eine Unterteilung des Intervalls $I = \bigcup_{i=0}^{n-1}[t_i, t_{i+1}]$ mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ gibt, so daß $\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}$ stetig differenzierbar ist.
- **parametrisiert nach Bogenlänge** falls $|\gamma'(t)| = 1$ für alle $t \in I$, wo $\gamma'(t)$ existiert.
- **konstant** falls $\gamma(t) = \gamma(a)$ für alle $t \in I$.

Die Menge $\gamma(I) \subset \mathbb{C}$ nennt man die **Spur** des Weges γ. Wir sagen γ **verbindet** den **Anfangspunkt** $\gamma(a)$ mit dem **Endpunkt** $\gamma(b)$.

Beispiel 3.1.2.

(a) Der Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{2\pi it}$ ist geschlossen und stetig differenzierbar. Seine Spur ist der Einheitskreis in $\mathbb{C}$.

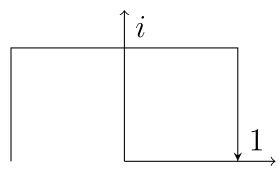


γ ist nicht nach Bogenlänge parametrisiert, da $|\gamma'| \equiv 2\pi$ ist. Dagegen ist $\widetilde{\gamma}$: $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}, s \mapsto e^{is}$ eine Parametrisierung des Einheitskreises nach Bogenlänge.

(b) Der Weg

$$\gamma : [-2, 2] \to \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} -1 + i(2 + t), & t \in [-2, -1] \\ i + t, & t \in [-1, 1] \\ 1 + i(2 - t), & t \in [1, 2] \end{cases}$$

ist offen und stückweise stetig differenzierbar.



γ ist nach Bogenlänge parametrisiert.

Konvention. Ab jetzt sind *alle* Wege **stückweise stetig differenzierbar**.

Definition 3.1.3. Die **Bogenlänge** eines Weges $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\ell(\gamma) := \int_\gamma |dz| := \int_I |\gamma'(t)| dt.$$

BEMERKUNG 3.1.4. Da γ auf I nur stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzt ist, ist γ' an den Nahtstellen im Allgemeinen nicht definiert. Der Integrand ist also nur auf $I \setminus \{t_1, \ldots, t_{n-1}\}$ definiert, aber dort stetig. Das Integral bleibt wohldefiniert.

Beispiel 3.1.5. Die Spur des Weges $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{2\pi it}$ ist der zentrierte Kreis vom Radius r in $\mathbb{C}$. Nach Definition gilt

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |2\pi i \; re^{2\pi it}| dt = \int_0^1 2\pi r dt = 2\pi r.$$

Die Definition der Bogenlänge würde wenig Sinn machen, wenn sie von der konkreten Parametrisierung des Weges abhängen würde.

Definition 3.1.6. Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein Weg und $J = [c, d]$ eine weiteres kompaktes Intervall. Für eine stetig differenzierbare Abbildung $\mu : J \to I$ mit $\mu(c) = a$, $\mu(d) = b$ definiere den vermöge μ **umparametrisierten Weg**

$$\mu^*(\gamma) := \gamma \circ \mu : J \to \mathbb{C}.$$

Die Abbildung μ nennt man eine **Umparametrisierung**. Setzt man zusätzlich $\mu' \geq 0$ voraus, so redet man von einer **nicht-negativen** Umparametrisierung.

Proposition 3.1.7. *Ist γ ein Weg und μ eine* nicht-negative *Umparametrisierung von γ, dann gilt*

$$\ell(\mu^*(\gamma)) = \ell(\gamma).$$

Beweis. Der Beweis ist eine einfache Anwendung der Substitutionsregel.

$$\begin{aligned}\ell(\mu^*(\gamma)) &= \int_J |(\gamma \circ \mu)'(t)|dt \\ &= \int_J |(\gamma'(\mu(t))\mu'(t)|dt \\ &\overset{\mu' \geqq 0}{=} \int_J |\gamma'(\mu(t))|\mu'(t)dt \\ &= \int_{I=\mu(J)} |\gamma'(s)|ds \\ &= \ell(\gamma).\end{aligned}$$

□

Definition 3.1.8. Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein Weg.

- Der **Umkehrweg** ist definiert durch

$$\gamma^- : I \to \mathbb{C},\ t \mapsto \gamma(a + b - t).$$

- Ist $\widetilde{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{C}$ ein weiterer **verkettbarer** Weg, d.h. $\gamma(b) = \widetilde{\gamma}(c)$. Der **Summenweg** (oder **verkettete Weg**) ist definiert durch

$$\gamma * \widetilde{\gamma} : [a, b + d - c] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \widetilde{\gamma}(t - b + c), & t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$

Ohne Mühe zeigt man:

Proposition 3.1.9.

(a) $\ell(\gamma * \widetilde{\gamma}) = \ell(\gamma) + \ell(\widetilde{\gamma})$;
(b) $\ell(\gamma) = \ell(\gamma^-)$.

3.2. Das Wegintegral

Das Wegintegral im Komplexen ist als vektorwertiges eindimensionales Integral mit einem speziellen Integranden definiert. Dabei fassen wir $\mathbb{C}$ als einen 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum auf. Für eine integrierbare komplexwertige Funktion $g : I \to \mathbb{C}$ auf dem reellen Intervall I schreiben wir

$$\int_I g(t)dt = \int_I \operatorname{Re} g(t)dt + i \int_I \operatorname{Im} g(t)dt.$$

Definition 3.2.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma : I \to U$ ein Weg und $f : U \to \mathbb{C}$ eine auf der Spur von γ stetige Funktion. Das **Wegintegral** (oder **Kurvenintegral**) von f **entlang des Weges** γ ist definiert durch

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_I f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Bei der Definition des Wegintegrals geht die Multiplikation der komplexen Zahlen entscheidend ein.

Hauptbeispiel 3.2.2. Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z}$ ist auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph. Für das Wegintegral von f entlang des entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten zentrierten Kreises vom Radius $r > 0$ (etwa gegeben durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ aus Beispiel 3.1.5) rechnet man

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{z} = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\ re^{it}}{re^{it}} dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i,$$

unabhängig vom Radius r.

Konvention. Das Symbol $\int_{|z-z_0|=r}$ bezeichnet ein Wegintegral entlang eines entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten und um z_0 zentrierten Kreises vom Radius r.

Übung 3.1. Berechne

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z},$$

wobei $|z_0| \neq r$ vorausgesetzt wird.
Hinweis: Unterscheide die Fälle $|z_0| < r$ und $|z_0| > r$.

Proposition 3.2.3.

(a) Das Wegintegral ist unabhängig von Umparametrisierungen.

Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, γ und $\widetilde{\gamma}$ verkettbare Wege in U und $f : U \to \mathbb{C}$ eine auf den Spuren von γ und $\widetilde{\gamma}$ stetige Funktion. Dann gilt:

(b) $\int_{\gamma * \widetilde{\gamma}} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)dz;$

(c) $\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$

Übung 3.2. Beweise Proposition 3.2.3. Belege die Unterschiede zu den Propositionen 3.1.7 und 3.1.9 anhand von Beispielen.

Definition 3.2.4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine auf U stetige[1] Funktion. Eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in U$ heißt **Stammfunktion** von f.

Das folgende Lemma besagt, daß Wegintegrale von Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, langweilig sind. Sie hängen nur vom Anfang- und Endpunkt des Weges ab:

[1] Wir werden später sehen, daß aus der Existenz einer (holomorphen) Stammfunktion die Holomorphie von f folgt.

Lemma 3.2.5. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a, b] \to U$ ein Weg und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit holomorpher Stammfunktion F. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

D.h. das Wegintegral von f hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges γ ab. Insbesondere verschwindet das Wegintegral von f entlang geschlossenen *Wegen.*

Beweis.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt = [(F \circ \gamma)(t)]_a^b.$$

□

Beispiel 3.2.6.

(a) Das Hauptbeispiel 3.2.2 besagt, daß die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

<u>*keine* Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$</u> haben kann.

(b) Dagegen besitzen alle übrigen Potenzfunktionen

$$f(z) = z^n$$

für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ auf ihrem maximalen Definitionsbereich U_n eine Stammfunktion $F : U_n \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Dabei ist $U_n = \mathbb{C}$ für $n \geq 0$ and $U_n = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für $n < -1$.

Wir werden später sehen, daß $f(z) = \frac{1}{z}$, bis auf Skalierungen, der einzige interessante *holomorphe* Integrand einer Wegintegration ist.

Übung 3.3.

(a) Berechne die Wegintegrale

$$\int_\gamma z e^{\frac{i\pi z^2}{2}} \cos e^{\frac{i\pi z^2}{2}} dz \quad \text{und} \quad \int_\gamma \overline{z}^2 dz$$

entlang einer geraden Strecke γ von i nach 1.

(b) Besitzt die stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}^2$ eine Stammfunktion?

Übung 3.4. Nach Beispiel 3.2.6.(a) besitzt die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Man kann aber kleinere Definitionsbereiche finden, worauf $f(z) = \frac{1}{z}$ doch eine Stammfunktion besitzt. Wir wissen bereits, daß keiner dieser Definitionsbereiche einen Kreis um 0 enthalten kann. Hier ist ein Beispiel eines Definitionsbereiches worauf eine Stammfunktion existiert, der sich nicht weiter vergrößern läßt:

Definiere die „im Negativen aufgeschlitzte Zahlenebene“ als das Komplement der nicht-positiven reellen Achse

$$U_- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} = \{re^{i\varphi} \mid r \in \mathbb{R}_{>0},\ \varphi \in (-\pi, \pi)\}.$$

Definiere die Funktion

$$\log : U_- \to \mathbb{C},\ z = |z|e^{i\varphi} \mapsto \log z := \log |z| + i\varphi,$$

wobei φ den eindeutigen Winkel von z im Intervall $(-\pi, \pi)$ bezeichnet. Wir nennen $\log z$ den **Logarithmus** von z. Zeige:

(a) Die Logarithmus-Funktion log ist eine Stammfunktion von $f(z) = \frac{1}{z}$ auf U_-.
(b) Bestimme die Komposition $\exp \circ \log : U_- \to \mathbb{C}$.
(c) Sein $z_1, z_2 \in U_-$ beliebig. Dann existiert für jeden Weg γ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ von z_1 nach z_2 ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß gilt

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \log(z_2) - \log(z_1) + 2\pi ik. \tag{*}$$

(d) Umgekehrt existiert für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein Weg γ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ von z_1 nach z_2, so daß (*) gilt.

Ende Vorl. 3

3.3. Zusatz: Zusammenhang zur Vektoranalysis und Anschauung

Spätestens dann, wenn man die Vektoranalysis gehört hat, wird man das Wegintegral als einen Spezialfall wiedererkennen.

- Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z = a + ib$ und $w = c + id$ kann man wie folgt auf das EUKLIDische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ zurückführen:

$$z \cdot w = ac - bd + i(ad + bc) = \langle \overline{z}, w \rangle + i \langle \overline{z}, w^\perp \rangle,$$

wobei $w^\perp := -iw = -d + ic$, der um $-\frac{\pi}{2}$ rotierte Vektor (bzw. komplexe Zahl) w ist.
- Das Wegintegral läßt sich somit wie folgt ausdrücken:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \left\langle \left(\overline{f} \circ \gamma\right)(t), \gamma'(t) \right\rangle dt + i \int_a^b \left\langle \left(\overline{f} \circ \gamma\right)(t), \gamma'(t)^\perp \right\rangle dt.$$

- Sind $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f = u + iv : U \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar (mit $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$) und $\gamma = \partial\Omega \subset U$ der Rand einer zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden offenen Fläche $\Omega \subset U$, so folgt aus den 2-dimensionalen Versionen der Sätze von **STOKES** und **GAUSS**, daß

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_\Omega (\operatorname{rot} \overline{f})_3 \, dxdy + i \int_\Omega \operatorname{div} \overline{f} \, dxdy \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy. \end{aligned} \tag{CR}$$

Die Integranden sind die linken Seiten der CAUCHY-RIEMANN Gleichungen!

- Ist f auf (dem zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden) Ω holomorph, so verschwinden die beiden Integranden in (CR) und somit das Wegintegral. Wir erhalten den **lokalen Satz von Cauchy**:
  Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende offene Menge, die mitsamt ihres Randes $\gamma := \partial\Omega$ im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ liegt, so verschwindet das Wegintegral
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Diesen Satz werden wir im nächsten Kapitel ohne die Hilfsmittel der Vektoranalysis beweisen. Beginn Vorl. 4

3.4. Wegunabhängige Integrierbarkeit und Existenz einer Stammfunktion

In diesem letzten Abschnitt wollen wir die Umkehrung von Lemma 3.2.5 beweisen.

Definition 3.4.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **wegunabhängig integrierbar**, falls für je zwei Wege $\gamma, \widetilde{\gamma}$ in U mit gleichem Anfangs- und Endpunkt
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)dz$$
gilt. Äquivalent: Das Wegintegral entlang *geschlossener* Wege γ in U verschwindet
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Im Beweis der Umkehrung brauchen wir eine Abschätzung, die sich auch später als nützlich erweisen wird. Daher formulieren wir sie als ein Lemma.

Lemma 3.4.2. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a,b] \to U$ ein Weg. Dann gilt*
$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \max_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \cdot \ell(\gamma).$$

Beweis.
$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \\ &\leq \max_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|dt \\ &= \max_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \cdot \ell(\gamma).\end{aligned}$$
□

Für die korrekte Formulierung der Umkehrung brauchen wir noch eine Definition.

Definition 3.4.3. Eine Teilmenge[2] $X \subset \mathbb{C}$ heißt **wegzusammenhängend**, falls für alle Punkte $z, w \in X$ ein Weg $\gamma : I \to X$ existiert, welcher z mit w verbindet. Eine offene wegzusammenhängende Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ nennt man **Gebiet**.

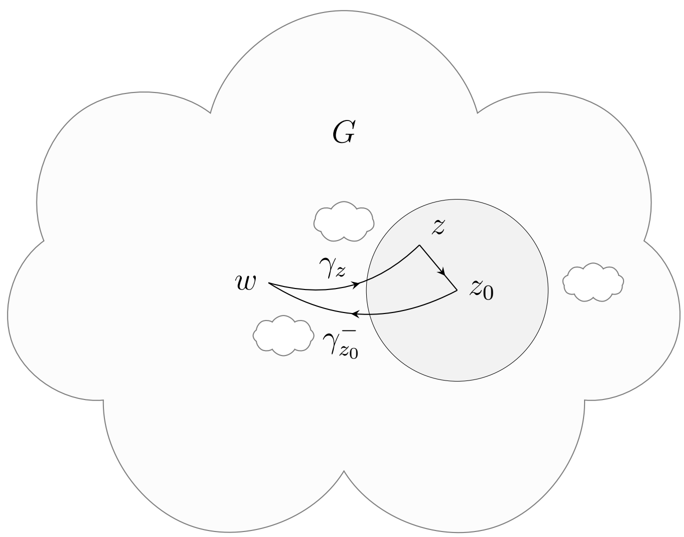
Satz 3.4.4. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. f besitzt genau dann eine Stammfunktion auf G, wenn f wegunabhängig integrierbar ist. In diesem Fall ist für ein beliebiges aber festes $w \in G$ die Funktion*

$$F : G \to \mathbb{C}, \; z \mapsto \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta, \quad \gamma_z \text{ ein beliebiger Weg von } w \text{ nach } z \text{ in } G,$$

eine (holomorphe) Stammfunktion von f.

Beweis. Die Hinrichtung ist die Aussage von Lemma 3.2.5. Für die Rückrichtung bemerken wir, daß F aufgrund der wegunabhängigen Integrierbarkeit von f wohldefiniert ist. Jetzt zeigen wir, daß F in der Tat eine Stammfunktion von f ist.

Dazu seien $z_0 \in G$ und $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z_0) \subset G$ und $z \in B_\varepsilon(z_0)$. Bezeichne mit $[z_0, z]$ die gerade Strecke von z_0 nach z. Dann ist $\gamma := \gamma_z * [z_0, z]^- * \gamma_{z_0}^-$ ein geschlossener Weg in G.



$\gamma := \gamma_z * [z_0, z]^- * \gamma_{z_0}^-$

Aus Proposition 3.2.3.(b,c) folgt

$$0 = \int_\gamma f(\zeta) d\zeta = F(z) - \int_{[z_0,z]} f(\zeta) d\zeta - F(z_0).$$

[2] Man kann hier $\mathbb{C}$ durch einen metrischen Raum, oder allgemeiner, topologischen Raum ersetzen.

Daraus erhalten wir die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right| &= \frac{1}{|z-z_0|}\left|\int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta - \underbrace{\int_{[z_0,z]} f(z_0)d\zeta}_{=f(z_0)(z-z_0)}\right| \\
&= \frac{1}{|z-z_0|}\left|\int_{[z_0,z]} \left(f(\zeta)-f(z_0)\right)d\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{|z-z_0|}\max_{\zeta\in[z_0,z]}|f(\zeta)-f(z_0)|\underbrace{\ell([z_0,z])}_{=|z-z_0|} \quad \text{(Lemma 3.4.2)} \\
&= \max_{\zeta\in[z_0,z]}|f(\zeta)-f(z_0)|\,.
\end{aligned}
$$

Letzteres strebt aber wegen der Stetigkeit von f gegen 0 für $z \to z_0$. $\square$

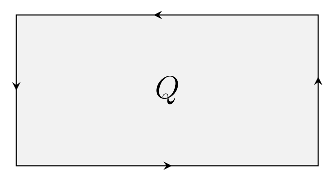
KAPITEL 4

Der Cauchysche Integralsatz

In diesem Kapitel beweisen wir den Cauchyschen Integralsatz für eine große Klasse von Kurven. Man kann behaupten, daß die gesamte technische Komplikation dieser Vorlesung genau im Beweis dieses zentralen Satzes konzentriert ist. Danach ist alles mehr oder weniger ein „Spaziergang“, um die Früchte zu ernten.

Also, ab in den letzten Kampf, der ehrlich gesagt auch unser erster ist.

4.1. Der Cauchysche Integralsatz für Rechtecke



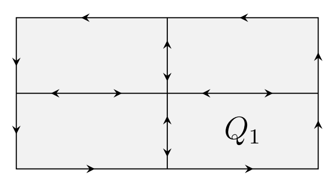
$\rho = \partial Q$

Wir beweisen den Satz zunächst für Ränder von achsenparallelen Rechtecken. Die Hauptidee des Beweises ist für diese Wege am klarsten zu erkennen. Verallgemeinerungen sind danach leicht möglich.

Satz 4.1.1 (Cauchyscher[1] Integralsatz für Rechtecke)**.** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$* holomorph *und Q eine achsenparallele Rechteckfläche, die mitsamt ihres Randes[2] $\rho := \partial Q$ in U liegt. Dann gilt*

$$\int_\rho f(z)dz = 0.$$

Beweis.



$\rho_1 = \partial Q_1$

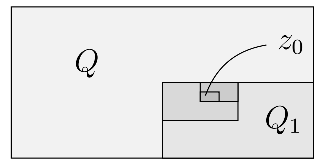
Wir unterteilen das Rechteck Q durch horizontales und vertikales Halbieren in vier gleich große Rechtecke. Wähle als Q_1 eines der vier Rechtecke, für das das Wegintegral betragsmäßig am größten ist. Ist ρ_1 der Rand von Q_1 so folgt aus der Wegadditivität des Wegintegrals (Lemma 3.2.3.(b,c))

[1]Auch, Integrationslemma von Goursat für Rechtecke genannt.

[2]Genau genommen müsste man sagen: ρ eine Parametrisierung des Randes ∂Q. Aber wie wir wissen, ist das Wegintegral unabhängig von Umparametrisierungen.

$$\left|\int_\rho f(z)dz\right| \le 4\left|\int_{\rho_1} f(z)dz\right|.$$

Wir fahren induktiv fort und erhalten eine absteigende Kette von Rechtecken $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$ mit Rändern $\rho_k = \partial Q_k$ und für jedes $k = 1, 2, \dots$ die Ungleichung



$Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$

$$\left|\int_\rho f(z)dz\right| \le 4^k\left|\int_{\rho_k} f(z)dz\right|.$$

Die Mittelpunkte dieser Rechtecke bilden eine CAUCHY-Folge die gegen einen Punkt $z_0 \in Q \subset U$ konvergiert. Die komplexe Differenzierbarkeit von f in z_0 bedeutet, daß wir $f(z)$ durch

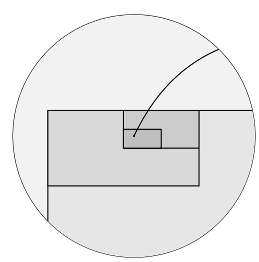
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \Delta(z) \quad \text{mit} \lim_{z\to z_0} \frac{\Delta(z)}{|z - z_0|} = 0$$

ersetzen können[3]. Die konstante Funktion $f(z_0)$ und die lineare Funktion $f'(z_0)(z - z_0)$ besitzen auf U eine Stammfunktion und tragen daher nicht zum Wegintegral bei. Ist $\ell := \ell(\rho)$ der Umfang von Q so folgt aus Lemma 3.4.2

$$\left|\int_\rho f(z)dz\right| \le 4^k\left|\int_{\rho_k} \Delta(z)dz\right| \le 4^k \cdot \max_{z\in \mathrm{Spur}(\rho_k)} |\Delta(z)| \cdot \underbrace{2^{-k}\ell}_{\ell(\rho_k)} = 2^k \cdot \max_{z\in \mathrm{Spur}(\rho_k)} |\Delta(z)| \cdot \ell,$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Um die rechte Seite der Ungleichung abzuschätzen, nutzen wir die Eigenschaft von Δ wie folgt aus: Für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so klein, daß $|\Delta(z)| \le \varepsilon|z - z_0|$ für alle $z \in B_\delta(z_0)$ gilt. Wähle schließlich k so groß, daß $Q_k \subset B_\delta(z_0)$ ist. Insbesondere ist dann $\max_{z\in\mathrm{Spur}(\rho_k)} |\Delta(z)| \le \max_{z\in\mathrm{Spur}(\rho_k)} \varepsilon|z - z_0| \le \varepsilon \cdot \underbrace{2^{-k}\ell}_{\ell(\rho_k)}$. Zusammenfassend erhalten wir die Ungleichung

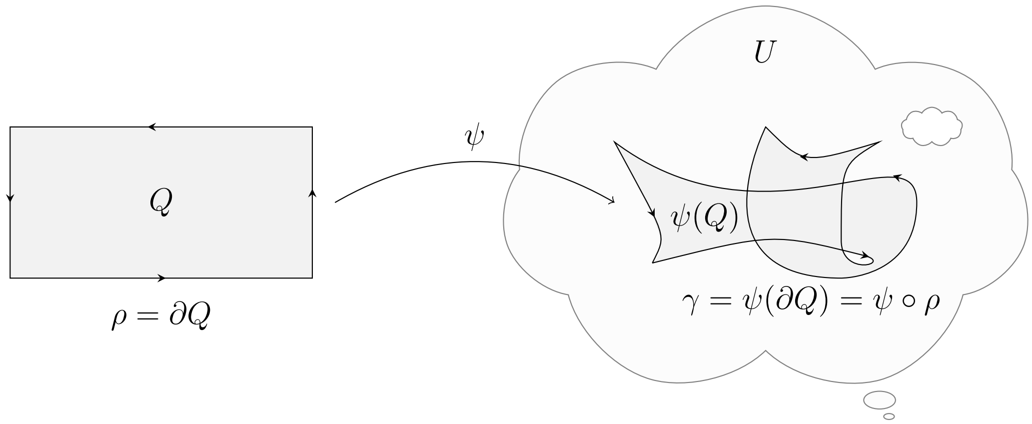

$Q_k \subset B_\delta(z_0)$

$$\left|\int_\rho f(z)dz\right| \le 2^k \cdot \varepsilon \cdot 2^{-k}\ell \cdot \ell = \varepsilon \cdot \ell^2.$$

Da nun ε beliebig klein gewählt werden darf, folgt die Behauptung $\int_\rho f(z)dz = 0$. □

[3]Wir benutzen also die komplexe Differenzierbarkeit von f an einem Punkt z_0 im *Inneren* von Q. Die komplexe Differenzierbarkeit entlang des Randes ρ ist daher irrelevant!

4.2. Der Cauchysche Integralsatz für C^1-Bilder von Rechtecken



Um die Anwendbarkeit des Cauchyschen Integralsatzes zu erweitern, beweisen wir ihn für stetig differenzierbare Bilder von Rechtecken. Dazu benötigen wir ein Lemma.

Im Folgenden seien Q eine achsenparallele Rechteckfläche, $\rho = \partial Q$, $\ell := \ell(\rho) = \ell(\partial Q)$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\psi : Q \to U$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $\gamma = \psi(\partial Q) = \psi \circ \rho$.

Lemma 4.2.1. *Es existiert eine reelle Konstante $C > 0$ mit*

$$\ell(\gamma) = \ell(\psi \circ \rho) \leq C \cdot \ell(\rho) = C \cdot \ell.$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $\rho : [0, \ell] \to \partial Q$ eine Parametrisierung von ∂Q nach Bogenlänge ist, d.h. $|\rho'(t)| = 1$ für alle[4] $t \in [0, \ell]$.

$$\ell(\gamma) = \int_0^\ell |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^\ell |(\psi \circ \rho)'(t)|\, dt = \int_0^\ell |\psi'(\rho(t)) \cdot \underbrace{\rho'(t)}_{|\cdot|=1}|dt \leq C \cdot \ell,$$

mit

$$C := \max\{|\psi'(z) \cdot w| \mid (z, w) \in \partial Q \times \partial B_1(0)\}.$$

Dabei ist $\psi'(z)$ die Matrix einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung von $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und „$\psi'(z) \cdot w$“ ein Matrix-Vektor-Produkt $\mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit Ergebnis in $\mathbb{C}$. Da die Abbildung

$$c : \partial Q \times \partial B_1(0) \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ (z, w) \mapsto |\psi'(z) \cdot w|$$

auf ihrem *kompakten* Definitionsbereich $\partial Q \times \partial B_1(0)$ stetig ist, wird ihr Maximum C angenommen. □

Satz 4.2.2 (Cauchyscher Integralsatz für Bilder von Rechtecken)**.** *Sei mit der obigen Voraussetzung $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann verschwindet das Wegintegral*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

entlang des Bildes $\gamma = \psi \circ \rho$ des Rechteckrandes $\rho = \partial Q$.

---

[4] Bis auf die Eckpunkte des Rechtecks, wo $\rho'(t)$ nicht definiert ist, aber das ist für die Integration irrelevant.

Beweis. Der Beweis ist eine Wiederholung des Beweises des Cauchyschen Integralsatzes für Rechtecke (Satz 4.1.1) mit offensichtlichen Modifikationen:

- Ersetze die Kette $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$ durch die Bilder $\psi(Q) \supset \psi(Q_1) \supset \psi(Q_2) \supset \cdots$ und betrachte die Wege $\gamma_k := \psi \circ \rho_k$.
- Ersetze z_0 durch ihr Bild unter ψ. Wegen der Stetigkeit von ψ ist $\psi(z_0)$ der Grenzwert der Bilder unter ψ der Mittelpunkte der verschachtelten Rechtecke Q_i.
- Die Bogenlänge eines Weges γ_k ist jetzt durch $C \cdot 2^{-k}\ell$ nach oben abzuschätzen.

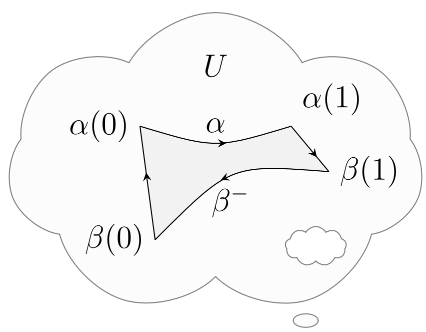
Am Ende erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \varepsilon \cdot C^2 \cdot \ell^2$$

und die Behauptung folgt. □

4.3. Spezielle Bilder von Rechtecken

In diesem Abschnitt betrachten wir Beispiele von Flächen in $\mathbb{C}$, die wir als Bilder von Rechtecken wiedererkennen wollen.



Beispiel 4.3.1. Sei U wie oben und seien $\alpha, \beta : [0,1] \to U$ zwei Wege, die mitsamt ihrer Verbindungsstrecken $[\alpha(t), \beta(t)]$ für alle $t \in [0,1]$ in U liegen. Dann ist die Kurve

$$\gamma := \alpha * [\alpha(1), \beta(1)] * \beta^- * [\alpha(0), \beta(0)]^-$$

Rand des Bildes des Quadrates $[0,1] \times [0,1]$ unter der stetig differenzierbaren Abbildung

$$\psi : [0,1] \times [0,1] \to U,\ (t,s) \mapsto \alpha(t)s + \beta(t)(1-s).$$

Für γ gilt daher die Aussage des Cauchyschen Integralsatzes für Bilder von Rechtecken:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

für jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$.

Übung 4.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweise folgende Korollare des Cauchyschen Integralsatzes.

(a) Seien α, β Wege in U *mit gleichen Anfangs- und Endpunkten*, die mitsamt ihrer Verbindungsstrecken in U liegen, dann gilt
$$\int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz.$$
(b) Seien α, β *geschlossene* Wege in U, die mitsamt ihrer Verbindungsstrecken in U liegen, dann gilt
$$\int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz.$$
(c) (**Cauchyscher Integralsatz für Kreisringe**) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und liegt der Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z - z_0| \leq R\}$ in U, so gilt
$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz = \int_{|z-z_0|=R} f(z)dz.$$
(d) (**Cauchyscher Integralsatz für Kreisscheiben**) Sei $z_0 \in U$ und liegt die Kreisscheibe $\overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}$ in U, so gilt
$$\int_{|z-z_0|=R} f(z)dz = 0.$$

Ende Vorl. 4

4.4. Homotopieinvarianz des Wegintegrals

Bevor wir dieses Kapitel abschließen, folgern wir die sogenannte „Homotopieinvarianz des Wegintegrals“ als eine extrem nützliche Variante des Cauchyschen Integralsatzes. Obwohl die Homotopie ein topologischer Begriff ist, den man für stetige Abbildungen definieren kann, wollen wir uns das Leben einfacher machen und uns bei der Definition auf stetig differenzierbare Wege beschränken. Bislang haben wir bei Wegen stückweise stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt. Die folgende Aufgabe zeigt, daß bis auf Umparametrisierung jeder solche Weg sogar *stetig differenzierbar* angenommen werden kann.

Übung 4.2. Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein (stückweise stetig differenzierbarer) Weg. Zeige: γ besitzt eine stetig differenzierbare Umparametrisierung $\widetilde{\gamma}$, d.h. es existiert eine stetig differenzierbare Umparametrisierung $\mu : J \to I$ mit $\widetilde{\gamma} := \mu^*(\gamma) := \gamma \circ \mu$ stetig differenzierbar.

Definition 4.4.1. Sei $X \subset \mathbb{C}$, eine Teilmenge und $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to X$ zwei stetig differenzierbare Wege in X. Wir sagen γ_0 ist **homotop** zu γ_1 (**in** X), falls es eine stetig differenzierbare Abbildung
$$H : [a, b] \times [0, 1] \to X$$
gibt mit
$$H(\cdot, 0) = \gamma_0 \text{ und } H(\cdot, 1) = \gamma_1,$$
d.h. die untere Rechteckseite wird unter H auf γ_0 und die obere auf γ_1 abgebildet. Definiere für die restlichen Parameter $s \in (0, 1)$ den Weg
$$\gamma_s := H(\cdot, s) : [a, b] \to X.$$

Wir nennen H eine **Homotopie von γ_0 nach γ_1 in X** und schreiben

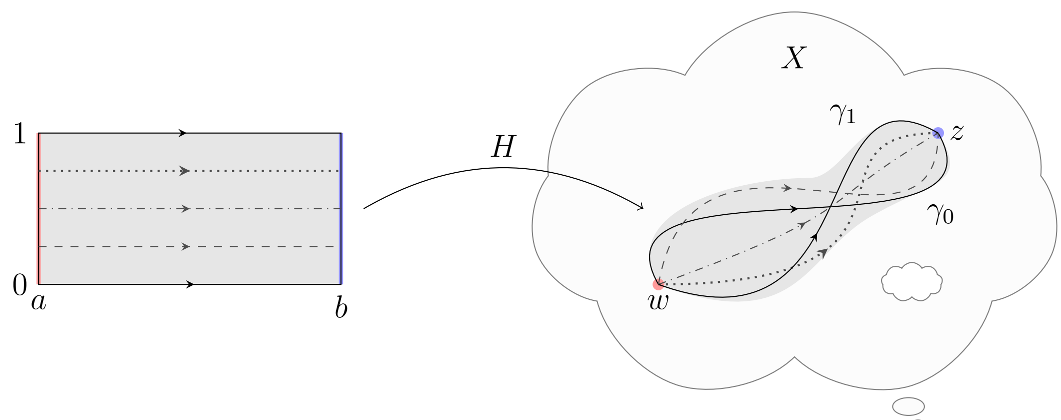
$$\gamma_0 \sim_H \gamma_1.$$

Es ist eine triviale Übung zu zeigen, daß die Homotopie von Wegen eine Äquivalenzrelation ist. Ebenso sind die beiden folgenden spezielleren Homotopiebegriffe Äquivalenzrelationen.

(a) Haben γ_0 und γ_1 den *gleichen Anfangspunkt* $w := \gamma_0(a) = \gamma_1(a) \in X$ und den *gleichen Endpunkt* $z := \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \in X$, so nennt man γ_0, γ_1 **(relativ)**[5] **homotop in X**, falls es eine (stetig differenzierbare) Homotopie H von γ_0 nach γ_1 in X gibt, die w und z respektiert, d.h.

$$\gamma_s(a) = w \text{ und } \gamma_s(b) = z \text{ für alle } s \in [0,1].$$

Anders ausgedrückt, wird die linke Rechteckseite unter H auf w und die rechte auf z abgebildet.

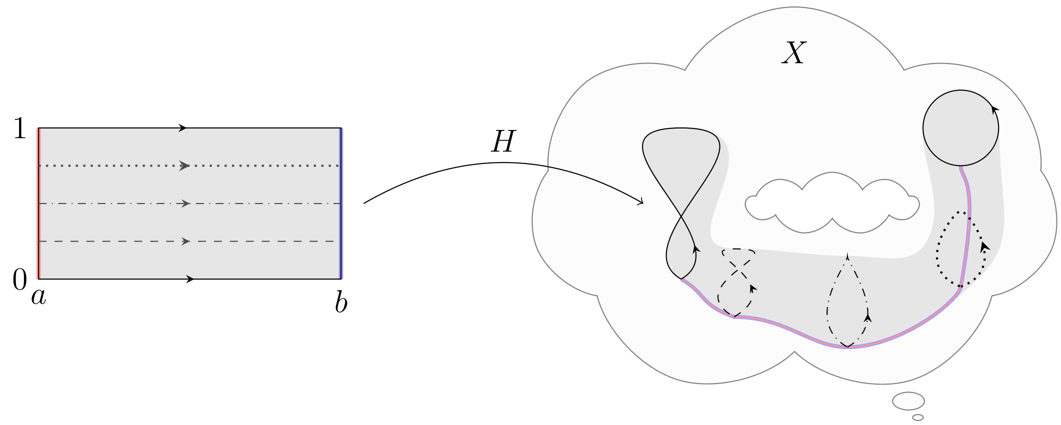


(b) Sind γ_0 und γ_1 *geschlossen* (mit *nicht* notwendigerweise gleichem Aufpunkt), so nennt man γ_0, γ_1 **(frei) homotop in X**, falls es eine (stetig differenzierbare) Homotopie H von γ_0 nach γ_1 in X gibt, so daß für alle $s \in (0,1)$ der Weg γ_s ebenfalls geschlossen ist, d.h.

$$H(a,s) = H(b,s) \text{ für alle } s \in [0,1].$$

Mit anderen Worten, werden vermöge H die Punkte der linken Rechteckseite mit den gleich hohen Punkten der rechten Rechteckseite identifiziert.

[5]Genauer, homotop relativ zur Teilmenge $\{(a,w),(b,z)\} \subset [a,b] \times X$.



(c) Ein *geschlossener* Weg heißt **nullhomotop in X**, wenn es zu einem konstanten Weg frei homotop in X ist. Anschaulich bedeutet das, daß sich der Weg zu einem Punkt in X kontrahieren läßt.

Jetzt kommen wir zur angekündigten Homotopieinvarianz.

Korollar 4.4.2 (Homotopieinvarianz des Wegintegrals)**.** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to U$ zwei Wege.*

(a) Haben γ_0 und γ_1 gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkt und sind sie relativ homotop in U, so ist

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

(b) Sind γ_0 und γ_1 geschlossen und frei homotop in U, so ist

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

(c) Ist der geschlossene Weg $\gamma : [a, b] \to U$ nullhomotop in U, so verschwindet das Wegintegral von f entlang γ:

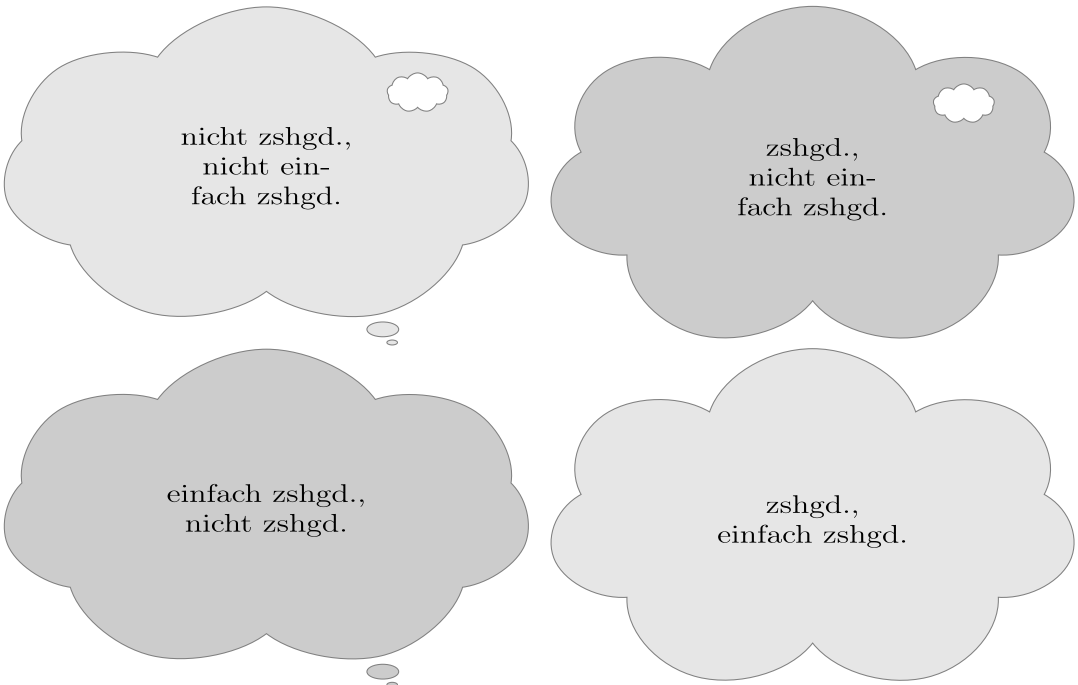
$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Beweis. Die Behauptungen (a) und (b) folgen aus dem Cauchyschen Integralsatz 4.2.2 für stetig differenzierbare Bilder von Rechtecken, angewandt auf die Homotopie $\psi := H$. Bei (a) werden die vertikalen Rechteckseiten jeweils unter H auf einen Punkt abgebildet. Bei (b) werden sie auf einen und denselben Weg aber mit entgegengesetzter Orientierung abgebildet. In beiden Fällen verschwindet ihr Gesamtbeitrag zum Wegintegral entlang des Bildes des Rechteckes unter H. Die Aussage (c) folgt unmittelbar aus (b), da Integrale entlang konstanten Wegen verschwinden. □

Übung 4.3. Löse Übung 3.1 mit und ohne Anwendung der Homotopieinvarianz.

Inspiriert durch (c) definieren wir:

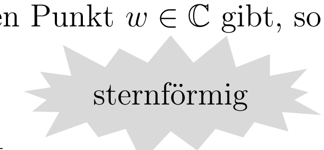
Definition 4.4.3. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls[6] jeder geschlossene Weg in X nullhomotop in X ist.



Beispiel 4.4.4. Konvexe Teilmengen $X \subset \mathbb{C}$ sind (wegzusammenhängend und) einfach zusammenhängend. Dabei heißt $X \subset \mathbb{C}$ **konvex**, falls für je zwei Punkte $z_1, z_2 \in X$ auch die Verbindungsstrecke $[z_1, z_2]$ in X enthalten ist. Eine Homotopie zwischen zwei beliebigen Wegen $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to X$ ist gegeben durch

$$H : [a, b] \times [0, 1] \to X,\ (t, s) \mapsto (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t).$$

Allgemeiner sind sternförmige Teilmengen $X \subset \mathbb{C}$ (wegzusammenhängend und) einfach zusammenhängend. Dabei heißt $X \subset \mathbb{C}$ **sternförmig**, falls es einen Punkt $w \in \mathbb{C}$ gibt, so



daß für alle $z \in X$ die Verbindungsstrecke $[w, z]$ in X enthalten ist.

Konvexe Mengen sind sternförmig. Für einen beliebigen Weg $\gamma : [a, b] \in X$ ist

$$H_w : [a, b] \times [0, 1] \to X,\ (t, s) \mapsto (1 - s)\gamma(t) + sw$$

eine Homotopie zwischen γ und dem konstanten Weg auf w.

[6] In den Lehrbüchern wird zusätzlich **wegzusammenhängend** vorausgesetzt. In der Forschungsliteratur weitet man nach Bedarf die Definition nachträglich auf nicht wegzusammenhängende Mengen aus, indem man verlangt, daß jede Wegzusammenhangskomponente einfach zusammenhängend ist – was auf unsere Definition hinausläuft. In der Forschungsliteratur wird daher jetzt oft statt der konventionellen Definition beides explizit gefordert. Wer sich von Euch daran stört, der kann die konventionelle Definition benutzen. Alle Aussagen bleiben richtig. Eins der vier Bilder müsste man dann etwas umständlicher beschreiben.

Insbesondere sind die Gebiete[7] $\mathbb{C}$ (konvex) und $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (sternförmig) einfach zusammenhängend.

Korollar 4.4.5. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann besitzt f eine Stammfunktion auf G.*

Beweis. Da alle geschlossenen Wege in G per Definition nullhomotop sind, folgt aus der Homotopieinvarianz (Korollar 4.4.2.(c)), daß Wegintegrale von f entlang geschlossenen Wegen verschwinden. Mit anderen Worten ist f wegunabhängig integrierbar. Die Behauptung folgt aus Satz 3.4.4. □

Dieses Korollar zeigt, daß die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion besitzt. In Übung 3.4 haben wir die Logarithmusfunktion auf $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ angegeben.

Korollar 4.4.6. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ **besitzt lokal eine Stammfunktion**. D.h. für alle $z \in U$ existiert eine offene Umgebung $V_z \subset U$, so daß $f_{|V_z}$ eine Stammfunktion besitzt.*

Beweis. Jeder Punkt $z \in U$, besitzt (per Definition) eine offene Scheibe $V_z := B_{\varepsilon_z}(z)$, die in U enthalten ist. Da diese (konvexe) Scheibe wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend ist, folgt die Behauptung aus dem letzten Korollar. □

Übung 4.4. Sei $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $1 \in G$. Zeige:

(a) Es gibt genau eine Stammfunktion von $f(z) = \frac{1}{z}$, die bei 1 den Wert 0 annimmt. Wie hängt diese Stammfunktion mit der Logarithmusfunktion aus Übung 3.4 zusammen?

(b) Es gibt genau eine Wurzelfunktion auf G, d.h. genau eine stetige Funktion $W : G \to \mathbb{C}$ mit $W(z)^2 = z$ für alle $z \in G$, die bei 1 den Wert 1 annimmt. Wir schreiben $\sqrt{z} := W(z)$.

(c) Die Wurzelfunktion erfüllt i.A. nicht $\sqrt{zw} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$ für alle $z, w \in G$ mit $zw \in G$. Es gilt aber $\sqrt{zw} = \pm\sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$.

(d) Es existiert keine stetige Wurzelfunktion auf ganz $\mathbb{C}$.

(e) Wo ist der Fehler beim vermeintlichen Widerspruch

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = 1 \ (?)$$

[7] D.h. offen und wegzusammenhängend (siehe Definition 3.4.3).

KAPITEL 5

Die Cauchysche Integralformel und Anwendungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Cauchyschen Integralformel und ihren diversen Anwendungen.

5.1. Die Cauchysche Integralformel

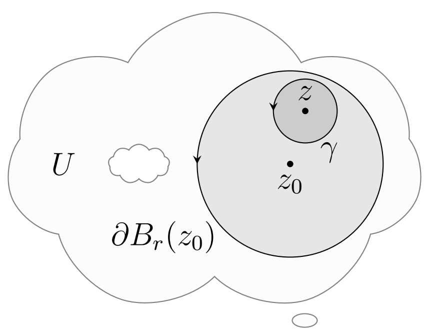
Der folgende Satz ist aus der Perspektive der reellen Analysis wahrlich verblüffend. Er zeigt einmal mehr, wie starr holomorphe Funktionen sind.

Satz 5.1.1 (Cauchysche Integralformel (für Kreisscheiben))**.** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $B_r(z_0)$ eine offene Kreisscheibe um z_0 vom Radius $r > 0$, die mitsamt ihres Randes $\partial B_r(z_0)$ in U liegt. Dann gilt für alle $z \in B_r(z_0)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Insbesondere ist die holomorphe Funktion f im Inneren der Kreisscheibe durch die Werte auf dem Rand bereits festgelegt.

Beweis. Zunächst nutzen wir die Homotopieinvarianz des Wegintegrals aus, und wählen uns einen geeigneteren Integrationsweg. Dazu sei $\varepsilon > 0$ derart, daß $B_\varepsilon(z) \subset B_r(z_0)$. Dann ist $\gamma := \partial B_\varepsilon(z)$ frei homotop zu $\partial B_r(z_0)$ in U und wir integrieren ab jetzt über γ.



Dann schreiben wir das Integral um:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Für den zweiten Summanden rechnen wir wie im Hauptbeispiel 3.2.2 nach

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = f(z).$$

Also bleibt zu zeigen, daß der erste Summand $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta$ Null ist. Sein Integrand ist holomorph auf $U\setminus\{z\}$ und in z stetig fortsetzbar durch $f'(z)$. Somit hat die Funktion $\zeta \mapsto \left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right|$ auf dem Kompaktum $\overline{B_r(z_0)}$ ein Maximum M und wir erhalten nach Lemma 3.4.2 die Abschätzung

$$\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right| \leq M\cdot \underbrace{2\pi\varepsilon}_{\ell(\gamma)}.$$

Wir schicken $\varepsilon\to 0$ und erhalten die Behauptung. □

Ende Vorl. 5

Bemerkung 5.1.2. Wir sind im Kontext von Satz 5.1.1. Ist $z\notin\overline{B_r(z_0)}$, so ist der Integrand $\zeta\mapsto\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ holomorph in einer Umgebung von $\overline{B_r(z_0)}$ und

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = 0,$$

nach dem Cauchyschen Integralsatz.

Die erstaunliche Cauchysche Integralformel, selbst ein Korollar des Cauchyschen Integralsatzes, hat natürlich weitreichende Folgen, die uns bis zum Ende der Vorlesung beschäftigen werden. Wir fangen mit einem einfachen Beispiel an.

Beispiel 5.1.3. Wir bleiben im Kontext von Satz 5.1.1. Ist f holomorph auf U und konstant auf dem Rand $\partial B_r(z_0)$, so ist f konstant auf dem Abschluß $\overline{B_r(z_0)}$. Dies folgt unmittelbar aus der Cauchyschen Integralformel.

Folgende Aufgabe zeigt die Anwendbarkeit aber auch die Grenzen der Cauchyschen Integralformel.

Übung 5.1. Bestimme die Wegintegrale

$$\int_{|z-1|=3}\frac{\sin(z)}{(z+\pi)(z-\frac{\pi}{2})}dz, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{1/\zeta}{\zeta-z}d\zeta.$$

Wann ist die Cauchysche Integralformel anwendbar? Kann man bei der Cauchyschen Integralformel auf die Holomorphie im Inneren von $B_r(z_0)$ verzichten?

Übung 5.2. Sei $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto\overline{z}^3$ und $S^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}=\partial B_1(0)$. Zeige: Es gibt keine holomorphe Funktion $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit $f_{|S^1}=g_{|S^1}$.

5.2. Mittelwertsatz, Maximums- und Minimumsprinzip

Der Beweis der Cauchyschen Integralformel zeigt, daß die offene Kreisscheibe $B_r(z_0)$ durch ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet B ersetzt werden kann, welches samt seines (in U nullhomotopen) Randes ∂B in U enthalten sein muß. Ist B aber die im Satz angegebene Kreisscheibe $B_r(z_0)$ und $z=z_0$ das Zentrum, so vereinfacht sich die Formel weiter:

Korollar 5.2.1 (Mittelwertsatz)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ für ein $z_0 \in U$ und ein $r > 0$. Dann ist*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt,$$

d.h. der Wert von f an z_0 ist der Mittelwert der Funktionswerte auf dem Rand der Kreisschreibe.

Beweis.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{it}\right)}{re^{it}} i \cdot re^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt.$$

□

Dieser scheinbar harmlose Spezialfall ist alles was wir brauchen um das mächtige Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen zu beweisen.

Satz 5.2.2 (Maximumsprinzip)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 ein Punkt in U, an dem $|f|$ ein lokales Maximum hat. Dann ist f bereits auf einer Umgebung von z_0 konstant.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $R > 0$, so daß die Funktion $|f|$ eingeschränkt auf $B_R(z_0) \subset U$ ihr globales Maximum in z_0 annimmt. Nach dem Mittelwertsatz (Korollar 5.2.1) gilt für $0 < r < R$

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{it}\right) \right| dt \\ &\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0\right) \right| dt \\ &= |f(z_0)|. \end{aligned}$$

Somit ist diese Ungleichungskette eine Kette von Gleichheiten. Wegen Gleichheit bei (*) und der Stetigkeit von $|f|$ folgt, daß $|f(z_0)| = |f(z_0 + re^{it})|$ für alle $0 < r < R$ alle und $t \in \mathbb{R}$. D.h. $|f|$ ist konstant auf $B_R(z_0)$. Wir können annehmen, daß $f(z_0) \neq 0$ ist, sonst wären wir fertig. Da die normierte Funktion $\left| \frac{f}{f(z_0)} \right| = 1$ erfüllt, folgt die Behauptung aus Übung 2.4.(c). □

Aus dem Maximumsprinzip folgern wir das analoge Minimumsprinzip.

Satz 5.2.3 (Minimumsprinzip)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 ein Punkt in U, an dem $|f|$ ein lokales Minimum ungleich Null hat. Dann ist f bereits auf einer Umgebung von z_0 konstant.*

Beweis. Die Voraussetzung erlaubt das Anwenden des Maximumsprinzips auf $\frac{1}{f}$. □

Bei jeder Nullstelle einer holomorphen Funktion f hat $|f|$ eine Nullstelle, die gleichzeitig ein lokales Minimum ist. Dies zeigt, daß bei der Formulierung des Minimumsprinzips auf die Voraussetzung $f(z_0) \neq 0$ nicht verzichtet werden kann.

Das Maximums- bzw. Minimumsprinzip läßt sich etwas prägnanter formulieren.

Korollar 5.2.4 (Holomorphe Funktionen nehmen ihr Betragsmaximum auf dem Rand an)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und* beschränkt *und $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf U holomorph ist. Dann wird das absolute Betragsmaximum von f auf dem Kompaktum $\overline{U}$ auf dem Rand ∂U angenommen. Die analoge Aussage gilt für das Betragsminimum, solange es von Null verschieden ist.*

Beweis. Für den Beweis brauchen wir eine verschärfte Formulierung des Maximumsprinzips (Satz 7.2.3), die wir später beweisen werden. □

Übung 5.3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeige: Hat $\operatorname{Re} f$ (bzw. $\operatorname{Im} f$) an $z_0 \in U$ ein lokales Maximum, so ist f auf einer Umgebung von z_0 konstant.

5.3. Erster Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

Die Stärke dieser Prinzipien deutet sich dadurch an, daß ein einfacher Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra in unsere Reichweite gelangt ist.

Satz 5.3.1 (Fundamentalsatz der Algebra, 1. Beweis)**.** *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. O.B.d.A. dürfen wir $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ normiert mit $n > 0$ annehmen. Die Ungleichung

$$|f(z)| = |z|^n \cdot \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdot + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq |z|^n \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right)}_{\to 1 \text{ für } |z| \to \infty}$$

besagt, daß $|f(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Insbesondere existiert ein $R > 0$ mit $|f(z)| > |f(0)|$ für alle $|z| \geq R$. Das bedeutet aber, daß das auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Polynom f auf $\overline{B_R(0)}$ sein Betragsminimum auf dem Rand $\partial B_R(0)$ nicht annimmt. Dies würde dem Minimumsprinzip widersprechen, es sei denn f besitzt eine Nullstelle in $B_R(0)$. □

KAPITEL 6

Potenzreihen und der Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor

In diesem Kapitel wollen wir eine weitere erstaunliche Eigenschaft holomorpher Funktionen beweisen: Holomorphe Funktionen sind analytisch, d.h. sie sind lokal in eine Potenzreihe entwickelbar. Insbesondere sind holomorphe Funktionen unendlich oft komplex differenzierbar. Für höhere Ableitungen werden wir eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel beweisen.

6.1. Komplexe Potenzreihen

In diesem Abschnitt wiederholen wir u.A. wichtige Eigenschaften von Potenzreihen, die im Komplexen ihre Gültigkeit behalten.

Der **Konvergenzradius** einer Potenzreihe um $z_0 \in \mathbb{C}$

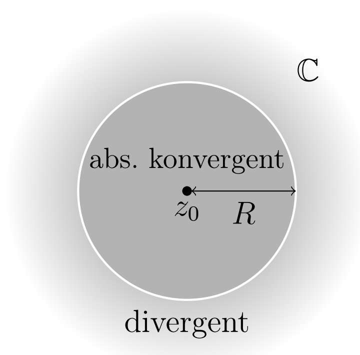
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (a_k \in \mathbb{C})$$

ist definiert als

$$R := \sup\{|z - z_0| \mid f \text{ konvergiert in } z\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Aus dem Majorantenkriterium folgt, daß $f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit

- $|z - z_0| < R$ absolut konvergiert;
- $|z - z_0| > R$ divergiert.



Wie die harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ zeigt, kann man für den Kreisrand $|z - z_0| = R$ keine solche Aussage machen. Entsprechend nennen wir $B_R(z_0)$ den **Konvergenzkreis** der Potenzreihe.

Für den Konvergenzradius leitet man aus dem Wurzelkriterium die **Cauchy-Hadamard Formel**

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

her. Das Quotientenkriterium liefert eine handlichere Formel, die aber etwas eingeschränkter einsetzbar ist.

Proposition 6.1.1. *Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine komplexe Potenzreihe, so ist*

$$R = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|,$$

vorausgesetzt der Grenzwert existiert im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne (d.h. in $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$).

BEMERKUNG 6.1.2. Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ ist auf jedem Kompaktum $K \subset B_R(z_0)$ gleichmäßig konvergent und somit auf jeder (offenen) Kreisscheibe $B_r(z_0)$ mit Radius $r < R$.

Lemma 6.1.3. *Eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ hat denselben Konvergenzradius wie die daraus durch gliedweises Differenzieren gebildete Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z-z_0)^{k-1}$.*

BEWEIS. Wir zeigen, daß der Konvergenzradius von g durch den von f nach unten beschränkt ist. Eine analoge Argumentation mit f und g in vertauschten Rollen zeigt die andere Ungleichung. Sei also z' aus dem Konvergenzkreis von f. Dann zeigen wir, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < |z'-z_0|$ die Potenzreihe g absolut konvergiert. Wir dürfen $z' \neq z_0$ annehmen und betrachten die Reihe der Absolutbeträge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|ka_k(z-z_0)^{k-1}\right| = \frac{1}{|z'-z_0|} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_k(z'-z_0)^k\right| \cdot \left|k\frac{(z-z_0)^{k-1}}{(z'-z_0)^{k-1}}\right|.$$

Da f bei z' absolut konvergiert, ist der erste Faktor $\left|a_k(z'-z_0)^k\right|$ eine Nullfolge, und kann daher durch eine Konstante $M > 0$ nach oben abgeschätzt werden. Und da nach Voraussetzung $q := \left|\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right| < 1$ ist, können wir schließlich die obige Reihe der Absolutbeträge durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|ka_k(z-z_0)^{k-1}\right| \leq \frac{M}{|z'-z_0|} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)q^k$$

abschätzen. Nach dem Quotientenkriterium ist der rechte Ausdruck wegen $q < 1$ endlich und die Behauptung ist bewiesen. □

In diesem Abschnitt wollen wir noch den Satz beweisen, daß Potenzreihen in ihrem Konvergenzkreis holomorph sind und dort gliedweise differenziert werden können. Dazu brauchen wir noch die nächste Proposition. Sie besagt, daß die komplexe Differentiation und die Grenzwertbildung unter gewissen Voraussetzungen vertauschbar sind. Da es sich hier um die Vertauschbarkeit mit der *komplexen* Differenzierbarkeit handelt, ist die Aussage durch keinen Satz der reellen Analysis abgedeckt.

Ende Vorl. 6

Proposition 6.1.4. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf U, die punktweise gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiere. Weiter seien die Ableitungen f_n' stetig auf U und ihre Folge (f_n') auf U gleichmäßig konvergent. Dann ist f holomorph auf U und $\lim_{n\to\infty} f_n' = f'$.*

BEWEIS. Setze, wie üblich, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $u_n = \operatorname{Re} f_n$, $v_n = \operatorname{Im} f_n$, $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Nach dem reellen Vertauschungssatz gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Da die Folge $(\frac{\partial u_n}{\partial x})$ nach Voraussetzung auf U gleichmäßig konvergiert, ist ihre Grenzfunktion $\frac{\partial u}{\partial x}$ stetig auf U. Dasselbe gilt für die drei anderen partiellen Ableitungen. Daraus folgt, daß $f = u + iv$ total differenzierbar auf U ist. Da die vier partiellen Ableitung $\frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y}, \frac{\partial v_n}{\partial x}, \frac{\partial v_n}{\partial y}$

der holomorphen Folgenglieder f_n die Cauchy-Riemann Differentialgleichung erfüllen, erfüllen ihre Grenzfunktionen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ sie ebenfalls und f ist holomorph. Daraus folgt, $\lim_{n\to\infty} f_n' = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} + i\frac{\partial v_n}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'$. □

Nun kommen wir zum angekündigten Satz.

Satz 6.1.5. *Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ ist auf ihrem Konvergenzkreis holomorph mit komplexer Ableitung $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z-z_0)^{k-1}$.*

Beweis. Nach Lemma 6.1.3 haben die Potenzreihen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ und $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z-z_0)^{k-1}$ den gleichen Konvergenzradius R. Nach Bemerkung 6.1.2 konvergieren beide Potenzreihen sogar gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $B_r(z_0)$ für alle $r < R$. Proposition 6.1.4 auf die Partialsummen von f und g angewandt liefert die Behauptung für $B_r(z_0)$. Schließlich lassen wir $r \to R$ streben. □

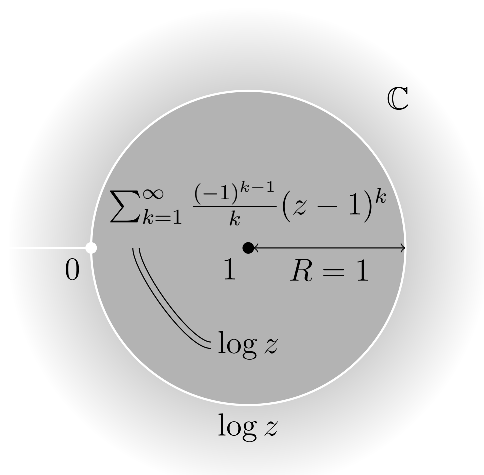
Beispiel 6.1.6. Betrachte die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k$$

mit Konvergenzradius $R = 1$ um $z_0 = 1$. Nach Satz 6.1.5 erhalten wir die Ableitung $f'(z)$ durch gliedweises Differenzieren

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(z-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(1-z)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(1-z)^k = \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}.$$

Die letzten beiden Gleichheitszeichen gelten natürlich nur im Konvergenzkreis. D.h. die holomorphe Funktion f ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$, die bei 1 den Wert 0 annimmt. Nach Übung 4.4 ist f eindeutig und gleich der Logarithmusfunktion log aus Übung 3.4, allerdings nur auf dem Konvergenzkreis $B_1(1)$. Letzteres ist nicht erstaunlich, da $\log z$ im Nullpunkt singulär ist (und somit dort nicht stetig fortgesetzt werden kann). Eine Potenzreihe $f(z)$ um $z_0 = 1$ für $\log z$ kann also 0 in ihrem Konvergenzkreis nicht enthalten.



Nachtrag Vorl. 8

6.2. Identitätssatz für Potenzreihen

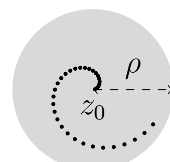
In diesem kurzen Abschnitt zeigen wir, daß eine Potenzreihe durch ihre Grenzfunktion eindeutig bestimmt ist. Wie wir später sehen werden, ist dies der wahre Grund für die Starrheit holomorpher Funktionen.

Lemma 6.2.1 (Isoliertheit von Nullstellen)**.** *Sei* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$*. Entweder sind alle* $a_k = 0$ *oder es existiert ein* $0 < r < R$ *mit* $f(z) \neq 0$ *für alle* $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$*.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $m = \min\{k \mid a_k \neq 0\} < \infty$ und $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ mit $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m}(z - z_0)^k$. Die Potenzreihe g hat denselben Konvergenzradius R. $g(z)$ ist stetig in $B_R(z_0)$ mit $g(z_0) = a_m \neq 0$. Also existiert ein $0 < r < R$ mit $g(z) \neq 0$ für alle $z \in B_r(z_0)$ und somit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. □

Satz 6.2.2 (Identitätssatz für Potenzreihen)**.** *Seien* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ *und* $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$ *zwei auf* $B_\rho(z_0) \neq \emptyset$ *konvergente Potenzreihen. Existiert eine Folge* (ζ_n) *aus* $B_\rho(z_0) \setminus \{z_0\}$ *mit* $\zeta_n \to z_0$ *und* $f(\zeta_n) = g(\zeta_n)$ *für alle* n*, so ist* $a_k = b_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$*.*

Beweis. Die Potenzreihe $h := f - g = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k - b_k)(z - z_0)^k$ konvergiert ebenfalls auf $B_\rho(z_0)$. Falls nicht alle $a_k = b_k$, so garantiert die Isoliertheit von Nullstellen (Lemma 6.2.1) die Existenz eines $0 < r < \rho$ mit $h(z) \neq 0$ für alle $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Wegen $\zeta_n \to z_0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\zeta_{n_0} \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dafür gilt dann $h(\zeta_{n_0}) \neq 0$. Widerspruch. □



Fortsetz. Vorl. 7

Die folgende Definition ist schon fast überfällig.

Definition 6.2.3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **analytisch**, falls sie sich um jeden Punkt $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ mit positivem Konvergenzradius R entwickeln läßt, d.h. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ für alle $z \in B_R(z_0)$.

Nach dem Identitätssatz ist die Potenzreihe von f um z_0 eindeutig bestimmt. Dies werden wir gleich anders folgern können.

6.3. Der Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor

Korollar 6.3.1 (Taylor-Formel für Potenzreihen)**.** *Sei* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$*. Dann ist* f *auf ihrem Konvergenzkreis* $B_R(z_0)$ *beliebig oft komplex differenzierbar. Weiterhin können alle komplexen Ableitungen* $f^{(k)}$ *gliedweise berechnet werden und*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Insbesondere gilt die **Taylor-*Formel***

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

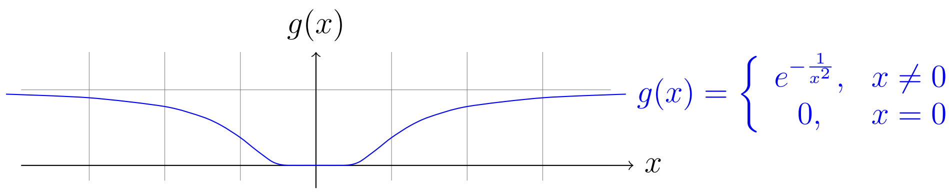
für alle $z \in B_R(z_0)$.

Beweis. Durch Induktion erhält man mit Satz 6.1.5, daß jede höhere komplexe Ableitung $f^{(k)}$ von f als Potenzreihe mit Konvergenzradius R existiert, und durch gliedweises Differenzieren der Potenzreihe $f^{(k-1)}$ berechnet werden kann. Wir erhalten

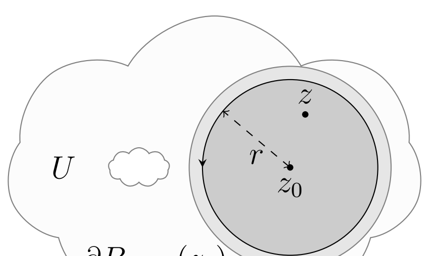
$$f^{(k)}(z) = \sum_{\ell=k}^{\infty} \ell(\ell-1)\cdots(\ell-k+1)\cdot a_\ell(z-z_0)^{\ell-k}.$$

Einsetzen von $z = z_0$ ergibt $f^{(k)}(z_0) = k! \cdot a_k$. □

Der nächste Satz ist eins der vielen Wunder der Funktionentheorie. Er besagt, daß holomorphe Funktionen bereits analytisch sind. Das ist in der reellen Analysis natürlich falsch. Eine differenzierbare Funktion ist nicht mal notwendigerweise stetig differenzierbar, geschweige denn zweimal differenzierbar. Und selbst eine unendlich oft differenzierbare Funktion ist nicht notwendigerweise analytisch. Z.B. ist die berühmte reelle Funktion



überall unendlich oft differenzierbar, aber in[1] $x_0 = 0$ nicht analytisch, da $g^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \geq 0$ ist, womit die Taylor-Reihe identisch verschwindet und nur in 0 mit g übereinstimmen kann[2]. Man kann sogar bezüglich eines geeigneten Maßes zeigen, daß bis auf eine Nullmenge, jede unendlich oft differenzierbare reelle Funktion *nirgends* analytisch ist!



Satz 6.3.2 (Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor)**.** *Holomorphe Funktionen sind analytisch. Genauer, sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph. Für ein beliebiges* z_0 *in* U *definiere* $r(z_0) := \sup\{r > 0 \mid B_r(z_0) \subset U\} \in (0, \infty]$. *Dann ist* f *um* z_0 *in eine Potenzreihe*

[1] und nur da

[2] $g(x) > 0$ mit der Ausnahme $x = 0$.

(nämlich ihre TAYLOR*-Reihe)*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

entwickelbar mit Konvergenzradius $R(z_0) \geq r(z_0)$. Die höheren komplexen Ableitungen von f an z_0 genügen der **CAUCHY*schen Koeffizientenformel***

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

für ein beliebiges $r < r(z_0)$.

BEWEIS. Für $z \in B_r(z_0)$ gilt nach der CAUCHYschen Integralformel (Satz 5.1.1)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta.$$

Da $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} =: q < 1$ für alle $\zeta \in \partial B_r(z_0)$, dürfen wir den zweiten Faktor des Integranden durch seine geometrische Reihenentwicklung ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k d\zeta. \end{aligned}$$

Entlang des kompakten Integrationsweges $\partial B_r(z_0)$ ist $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$ (als Funktion in ζ) betragsmäßig beschränkt und $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = q < 1$ konstant. Daher konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig[3] in ζ und wir dürfen Integration und Summation vertauschen. Nach Vereinfachung erhalten wir eine Potenzreihenentwicklung von f um z_0

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta\right)}_{\text{unabhängig von } z} \cdot (z-z_0)^k.$$

Der Rest folgt aus der TAYLOR-Formel für Potenzreihen (Korollar 6.3.1). □

6.4. Anwendungen: Satz von GOURSAT und Verallgemeinerte CAUCHYsche Integralformel

Korollar 6.4.1 (Satz von GOURSAT)**.** *Holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar.*

[3] da sie durch ein Vielfaches einer geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} Mq^k$ betragsmäßig nach oben abgeschätzt werden kann.

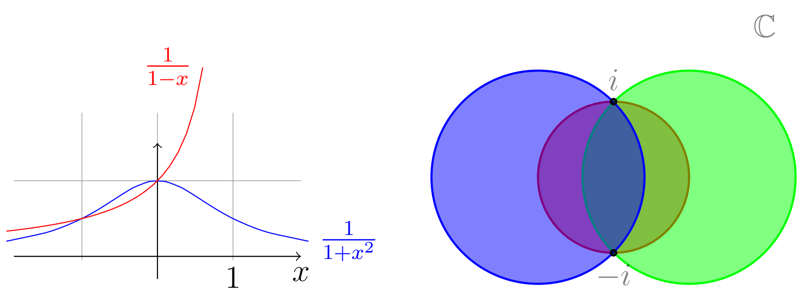
Aufgrund der Homotopieinvarianz des Wegintegrals kommt es bei der obigen CAUCHYschen Koeffizientenformel nicht darauf an, daß z_0 im Mittelpunkt des Integrationskreises liegt. Wir können z_0 durch jeden Punkt z in $B_r(z_0)$ ersetzen und erhalten eine exakte Verallgemeinerung der CAUCHYschen Integralformel (Satz 5.1.1).

Satz 6.4.2 (Verallgemeinerte CAUCHYsche Integralformel (für Kreisscheiben))**.** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $B_r(z_0)$ eine offene Kreisscheibe um z_0 vom Radius $r > 0$, die mitsamt ihres Randes $\partial B_r(z_0)$ in U liegt. Dann gilt für alle $z \in B_r(z_0)$*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Insbesondere ist die holomorphe Funktion f und ihre holomorphen Ableitungen $f^{(k)}$ im Inneren der Kreisscheibe durch die Werte von f auf dem Rand bereits festgelegt.

Beispiel 6.4.3. Es ist schon im Reellen klar, warum die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ keinen Konvergenzradius > 1 haben kann. Die Reihe konvergiert in ihrem Konvergenzbereich nun einmal punktweise gegen $\frac{1}{1-x}$ und bei $x = 1$ liegt eine Singularität vor.



Bei der TAYLOR-Reihenentwicklung von $\frac{1}{1+x^2}$ um $x_0 = 0$ ist es zunächst merkwürdig, daß der Konvergenzradius 1 ist, obwohl die Funktion überall auf der reellen Achse sogar unendlich oft differenzierbar, ja sogar analytisch ist. Der Entwicklungssatz von CAUCHY-TAYLOR verschafft jetzt Klarheit: Die rationale Funktion $\frac{1}{1+z^2}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ holomorph. Die TAYLOR-Reihe um $z_0 = 0$ hat den Konvergenzradius 1. Dagegen hat die um $z_0 = 1$ bzw. $z_0 = -1$ den Konvergenzradius $\sqrt{2}$.

Übung 6.1.

(a) Bestimme das Wegintegral

$$\int_{|z-1|=3} \frac{\sin(z)}{(z+\pi)^a (z - \frac{\pi}{2})^b} dz.$$

für $a, b \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimme den Konvergenzradius der TAYLOR-Reihe von $\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}$ um $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ bzw. $x_0 = 2$.
Hinweis: Was ist $\frac{x^5-1}{x-1}$?

(c) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) z^k$ wobei

$$\varphi(k) = |(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*| = |\{\ell \in \{1, \ldots, k\} \mid \mathrm{ggT}(\ell, k) = 1\}|$$

die EULERsche φ-Funktion ist.

Übung 6.2. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ definiere für $a \in \mathbb{C}$ die **komplexe Potenz**

$$z^a := e^{a \log z},$$

mit log aus Übung 3.4.
Beweise für $|z| < 1$ die **verallgemeinerte binomische Formel**

$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k,$$

wobei $\binom{a}{k} := \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$ der **verallgemeinerte Binomialkoeffizient** ist.

Ende Vorl. 7

Bevor wir diesen Abschnitt abschließen, wollen wir noch eine extrem nützliche Abschätzung beweisen. Sie ist eine Verallgemeinerung des Maximumsprinzips.

Lemma 6.4.4 (Abschätzung der TAYLOR-Koeffizienten)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ mit $r > 0$. Dann gilt*

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right| \leq \frac{k!}{r^k} \cdot \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

BEWEIS.

$$\begin{aligned}
\left|f^{(k)}(z_0)\right| &= \left|\frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz\right| && \text{(Entwicklungssatz von CAUCHY-TAYLOR)} \\
&\leq \frac{k!}{2\pi} 2\pi r \cdot \max_{|z-z_0|=r} \left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\right| && \text{(Lemma 3.4.2)} \\
&= \frac{k!}{r^k} \cdot \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|
\end{aligned}$$

□

6.5. Charakterisierung der Holomorphie

Der Satz von MORERA ist eine Umkehrung des Satzes von CAUCHY.

Satz 6.5.1 (Satz von MORERA)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig mit*

$$\int_{\partial \Delta} f dz = 0 \quad \text{für jedes abgeschlossene Dreieck } \Delta \subset U.$$

Dann ist f holomorph.

Beweis. Da die Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, darf man ohne Einschränkung annehmen, daß U eine offene Kreisscheibe $B_r(z_0)$ ist. Verfahre analog zum Beweis des Satzes 3.4.4 und konstruiere eine (holomorphe) Stammfunktion von f. Die Behauptung folgt dann aus dem Satz von Goursat (Korollar 6.4.1). □

Der folgende Satz bzw. die folgende Offenbarung ist eine Zusammenfassung der bisherigen Einsichten. Er betont einmal mehr, wie speziell holomorphe Funktionen sind. Für dessen Formulierung brauchen wir noch eine Definition.

Definition 6.5.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. f heißt **lokal wegunabhängig integrierbar**, falls es um jeden Punkt $z \in U$ eine offene Umgebung V_z gibt, so daß $f_{|V_z}$ wegunabhängig integrierbar ist.

Satz 6.5.3. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(a) f ist holomorph.
(b) f ist reell total differenzierbar und erfüllt[4] die Cauchy-Riemann *Differentialgleichung.*
(c) f ist unendlich oft komplex differenzierbar.
(d) f ist analytisch.
(e) f besitzt lokal eine Stammfunktion.
(f) f ist lokal wegunabhängig integrierbar.
(g) $\int_\gamma f dz = 0$ für jeden in U nullhomotopen (geschlossenen) Weg γ.
(h) $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset U$.
(i) Für alle $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad \text{für alle } z \in B_r(z_0).$$

Beweis.

- Die Äquivalenz von (a) und (b) ist Inhalt des Satzes 2.2.4.
- Satz 6.1.5 liefert (d) $\Rightarrow$ (c). Die Implikation (c) $\Rightarrow$ (a) is trivial. Die Richtung (a) $\Rightarrow$ (d) ist die Aussage des Entwicklungssatzes von Cauchy-Taylor (Satz 6.3.2).
- Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (e) liefert Korollar 4.4.6. Die Rückrichtung (e) $\Rightarrow$ (a) folgt aus dem Satz von Goursat (Satz 6.4.1), da f als Ableitung ihrer holomorphen lokalen Stammfunktionen auch holomorph ist.
- (a) $\Rightarrow$ (g) ist Korollar 4.4.2.(c). Die Implikation (g) $\Rightarrow$ (f) ist trivial. Satz 3.4.4 liefert schließlich (f) $\Rightarrow$ (e), da jeder Punkt in $z \in U$ eine wegzusammenhängende einfach zusammenhängende Umgebung $B_{r_z}(z) \subset U$ besitzt.
- Der Satz von Morera (Satz 6.5.1) ist die Richtung (h) $\Rightarrow$ (a). Die Rückrichtung (a) $\Rightarrow$ (h) erledigt der Satz von Cauchy (Satz 4.2.2).
- Von (a) $\Rightarrow$ (i) ist die Cauchysche Integralformel (Satz 5.1.1). Der Beweis des Entwicklungssatzes von Cauchy-Taylor (Satz 6.3.2) zeigt (i) $\Rightarrow$ (d).

[4] an jedem Punkt

□

Ich schließe dieses Kapitel mit einem Zitat ab.

> In der Funktionentheorie ist jeder Tag ein Sonntag.
>
> (Prof. Josef Bemelmans, RWTH-Aachen)

KAPITEL 7

Satz von LIOUVILLE, Identitätssatz und Gebietstreue

7.1. Der Satz von LIOUVILLE und ein zweiter Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

Nach Defintion 2.1.1 heißt eine Funktion ganz, falls sie auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist.

Satz 7.1.1 (Satz von LIOUVILLE). *Jede ganze beschränkte Funktion ist konstant.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert ein $M \geq 0$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Abschätzung der TAYLOR-Koeffizienten impliziert, daß $|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$ für alle $r > 0$. Schickt man $r \to \infty$, so folgt $f' \equiv 0$. Da $\mathbb{C}$ wegzusammenhängend ist, folgt die Behauptung. □

BEMERKUNG 7.1.2. Die Funktion $f(z) = z$ zeigt, daß man $\mathbb{C}$ als Holomorphiegebiet nicht durch ein beschränktes Gebiet ersetzen kann.

Folgende Übungen sind eine weitere Verallgemeinerung bzw. Verschärfung des Satzes von LIOUVILLE.

Übung 7.1. Sei f eine ganze Funktion, $n \in \mathbb{N}_0$ und $r, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ Konstanten derart, daß $|f(z)| \leq c|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$. Zeige: f ist ein Polynom vom Grad höchstens n.

Übung 7.2. Das Bild einer ganzen nicht konstanten Funktion f ist dicht in $\mathbb{C}$ (d.h. $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$).

Der Satz von LIOUVILLE liefert einen zweiten einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

2. BEWEIS DES FUNDAMENTALSATZES DER ALGEBRA (SATZ 5.3.1). Bei dem ersten Beweis haben wir schon gezeigt, daß es Konstanten $M, R > 0$ gibt, so daß $|f(z)| \geq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Dann gilt $\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{M}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Somit ist $\frac{1}{f}$ auf $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$ beschränkt. Wir nehmen an, das Polynom f habe keine Nullstellen in $\mathbb{C}$. Dann ist $\frac{1}{f}$ ebenfalls ganz. Aber auf dem Kompaktum $\overline{B_R(0)}$ ist das stetige $\frac{1}{f}$ ebenfalls beschränkt und somit auf ganz $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von LIOUVILLE (Satz 7.1.1) ist $\frac{1}{f}$ konstant und damit auch f. □

Ende Vorl. 8

7.2. Der Identitätssatz

Satz 7.2.1 (Identitätssatz, Spezielle Formulierung). *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein* Gebiet *und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

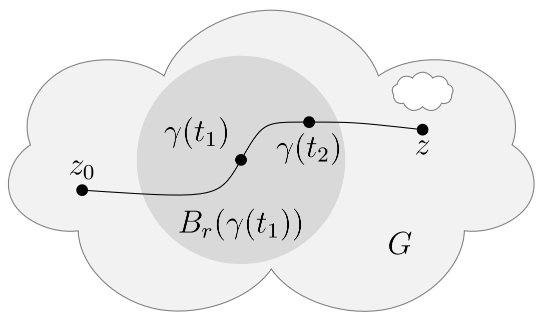
(a) $f = 0$.

(b) $f(\zeta_n) = 0$ *für eine Folge* (ζ_n) *in* G *mit* $\zeta_n \to z_0 \in G$ *und* $z_0 \neq \zeta_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
(c) Es existiert ein $z_0 \in G$ *mit* $f^{(k)}(z_0) = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) ist trivial (jedes $z_0 \in G$ ist Häufungspunkt einer konvergenten Folge in G).
(b) $\Rightarrow$ (c): Entwickle die holomorphe Funktion f in ihre Taylor-Reihe um den Häufungspunkt $z_0 \in G$ (aus (b)) (Satz 6.3.2). Es gilt $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$ für alle z aus einer offenen nichtleeren Kreisscheibe $B_r(z_0) \subset G$. Ohne Einschränkung können wir annehmen[1], daß $\zeta_n \in B_r(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Da $f(\zeta_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, stimmt die Taylor-Reihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$ mit der Nullreihe $g(z) = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} 0(z-z_0)^k$ auf (ζ_n) überein. Der Identitätssatz für Potenzreihen (Satz 6.2.2) liefert $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \geq 0$.
(c) $\Rightarrow$ (a): Wir müssen jetzt zeigen, daß $f(z) = 0$ ist für alle $z \in G$. Sei also $z \in G$ beliebig. Wähle einen Weg $\gamma : [0,1] \to G$ von z_0 nach z (d.h. $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$). Ein solcher Weg existiert, da G wegzusammenhängend ist. Betrachte die Menge

$$N := \{t \in [0,1] \mid f^{(k)}(\gamma(t)) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\} \subset [0,1].$$

Nach Voraussetzung ist N nicht leer, da $0 \in N$ ist. Außerdem ist das beschränkte $N = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \left(f^{(k)} \circ \gamma\right)^{-1}(\{0\})$ als Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen[2] abgeschlossen. Insbesondere enthält N ihr Maximum $t_1 := \max N$. Angenommen $t_1 < 1$, sonst sind wir fertig.



Der Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor (Satz 6.3.2) impliziert, daß f in einer Umgebung $B_r(\gamma(t_1))$ verschwindet, insbesondere existiert ein $t_2 \in N$ mit $t_2 > t_1$. Widerspruch. $\square$

Satz 7.2.2 (Identitätssatz)**.** *Seien* $G \subset \mathbb{C}$ *ein* Gebiet *und* $f, g : G \to \mathbb{C}$ *holomorphe Funktionen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $f = g$.
(b) $f(\zeta_n) = g(\zeta_n)$ *für eine Folge* (ζ_n) *in* G *mit* $\zeta_n \to z_0 \in G$ *und* $z_0 \neq \zeta_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
(c) Es existiert ein $z_0 \in G$ *mit* $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$.

---

[1] Dies ist sonst mit einer Ausnahme von endlich vielen Punkten der Fall.

[2] $\left(f^{(k)} \circ \gamma\right)^{-1}(\{0\})$ ist als stetiges Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\} \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen.

Beweis. Wende die spezielle Formulierung des Satzes (Satz 7.2.1) auf $h := f - g$ an. $\square$

Aus dem Identitätssatz folgern wir sofort eine Verschärfung des Maximumsprinzips.

Satz 7.2.3 (Maximumsprinzip, Verschärfung). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$ ein Punkt, an dem $|f|$ ein lokales Maximum hat. Dann ist f konstant auf G.*

Bei der ursprünglichen Formulierung (Satz 5.2.2) konnten wir nur beweisen, daß f auf einer Umgebung von z_0 konstant ist. Eine analoge Aussage gilt für das Minimumsprinzip.

Beispiel 7.2.4. Sei $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n+1}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da der Häufungspunkt 0 der Folge $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ in $B_1(0)$ liegt, folgt aus dem Identitätssatz, daß f identisch verschwindet.

Übung 7.3. Beweise oder widerlege:

(a) Es gibt eine ganze Funktion f mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2+1}{n^3+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) Es gibt eine ganze Funktion f mit $f(n) = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(c) Es gibt eine nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Übung 7.4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein x-achsensymmetrisches Gebiet, d.h. $z \in G \iff \overline{z} \in G$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Definiere für eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$f^* : G \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{f(\overline{z})}.$$

Zeige:

(a) f^* ist ebenfalls holomorph.
(b) $f(\mathbb{R} \cap G) \subset \mathbb{R} \iff f = f^*$.

Alle aus der reellen Analysis auf $\mathbb{C}$ fortgesetzten holomorphen Funktionen erfüllen die Bedingungen aus (b), etwa rationale Funktionen mit *reellen* Koeffizienten, exp, log, sin, cos, und Summen, Produkte, Quotienten und Verkettungen solcher Funktionen.

7.3. Gebietstreue

Satz 7.3.1 (Gebietstreue). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine* nichtkonstante *holomorphe Funktion. Dann ist $f(G) \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.*

Beweis. Stetige Bilder wegzusammenhängender Mengen sind wegzusammenhängend[3]. Es bleibt zu zeigen, daß $f(G)$ offen ist. Sei $z_0 \in G$ beliebig. Wir dürfen annehmen, daß $f(z_0) = 0$, d.h. daß z_0 eine Nullstelle von f ist, sonst ersetzen wir f durch die verschobene Funktion $f - f(z_0)$. Wir wollen zeigen, daß ein $m > 0$ existiert, mit $B_m(0) = B_m(f(z_0)) \subset f(G)$. Da die analytische Funktion f nach Voraussetzung nichtkonstant ist, existiert wegen der Isoliertheit der Nullstelle z_0 (Lemma 6.2.1) ein $r > 0$ mit $0 \notin f(\overline{B_r(z_0)} \setminus \{z_0\})$ (und

[3] da stetige Bilder von stetigen Wegen wieder stetige Wege sind.

natürlich $\overline{B_r(z_0)} \subset G$). Insbesondere ist

$$0 < \min_{z\in\partial B_r(z_0)} |f(z)| =: 2m.$$

Sei nun $w \in B_m(0) = B_m(f(z_0))$. Wir wollen also zeigen, daß es ein $\zeta \in G$ gibt mit $f(\zeta) = w$, bzw., daß die Funktion $g(z) := f(z) - w$ eine Nullstelle $\zeta \in G$ hat. Für alle $z \in \partial B_r(z_0)$ gilt

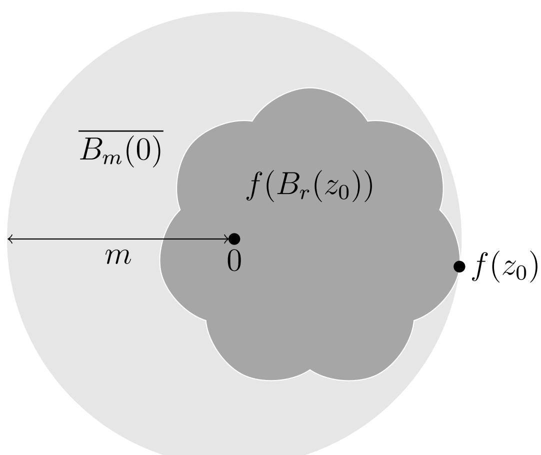
$$|g(z)| = |f(z) - w| \geq \underbrace{|f(z)|}_{\geq 2m} - \underbrace{|w|}_{<m} > m.$$

Da aber $|g(z_0)| = |f(z_0) - w| = |0 - w| = |w| < m$ ist, folgt aus dem Minimumsprinzip (Satz 5.2.3), daß g eine Nullstelle $\zeta \in B_r(z_0) \subset G$ haben muß. □

Bemerkung 7.3.2.

(a) Da eine eindimensionale Menge in $X \subset \mathbb{C}$ (wie etwa $\mathbb{R}, i\mathbb{R}, S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$) nicht offen in $\mathbb{C}$ ist, folgt für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, daß eine holomorphe Funktion $f : G \to X$ konstant sein muß. Daraus folgt[4] Übung 2.4.(b,c).

(b) Aus der Gebietstreue folgt wiederum das Maximumsprinzip (Satz 5.2.2): Sei $z_0 \in U$ ein lokales Betragsmaximum der nichtkonstanten holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist z_0 ein globales Betragsmaximum der eingeschränkten Funktion $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$, für ein $r > 0$. Definiere $m := |f(z_0)| > 0$. Dann gilt $f(z_0) \in \partial B_m(0) \subset \overline{B_m(0)} \supset f(B_r(z_0))$. Somit liegt $f(z_0)$ auf dem Rand von $f(B_r(z_0))$. Dies ist ein Widerspruch zur Gebietstreue.



[4]Beachte, daß Übung 2.4.(c) beim Beweis des Maximums- (Satz 5.2.2) und somit des Minimumsprinzips einging.

KAPITEL 8

LAURENT-Reihen

Aus dem Entwicklungssatz von CAUCHY-TAYLOR (Satz 6.3.2) wissen wir, daß holomorphe Funktionen lokal in Potenzreihen entwickelbar sind, solange die Entwicklungspunkte im Definitionsbereich liegen. In diesem Kapitel entwickeln wir holomorphe Funktionen in sogenannte LAURENT-Reihen um Punkte herum, die sogar außerhalb des Definitionsbereiches liegen dürfen. Die Potenzreihenentwicklung hat uns erlaubt, die CAUCHYsche Integralformel auf Ableitungen auszudehnen. Die LAURENT-Reihenentwicklung ist unser erster Schritt zum Residuenkalkül.

8.1. LAURENT-Reihen: Definition und erste Eigenschaften

Definition 8.1.1. Eine **LAURENT-Reihe um** $z_0 \in \mathbb{C}$ ist die (formale) Summe von zwei komplexen Reihen

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-z_0)^k}_{=:f^-(z)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{=:f^+(z)} .$$

Die Reihe $f^-(z)$ der negativen Potenzen in $(z-z_0)$ nennt man den **Hauptteil** und die Reihe $f^+(z)$ den **Nebenteil** der LAURENT-Reihe f. Eine LAURENT-Reihe heißt **konvergent** für $\zeta \in \mathbb{C}$, falls beide Reihen f^+ und f^- für $z = \zeta$ konvergieren.

Als nächstes wollen wir den Begriff des Konvergenzkreises für LAURENT-Reihen anpassen. Sei $R^+ \in [0,\infty]$ der Konvergenzradius des Nebenteils $f^+(z)$ (als Potenzreihe in $z - z_0$) und $\frac{1}{R^-} \in [0,\infty]$ der Konvergenzradius des Hauptteils $f^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \left(\frac{1}{z-z_0}\right)^k$ (als Potenzreihe in $\frac{1}{z-z_0}$), sprich der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} w^k$ um 0. D.h.

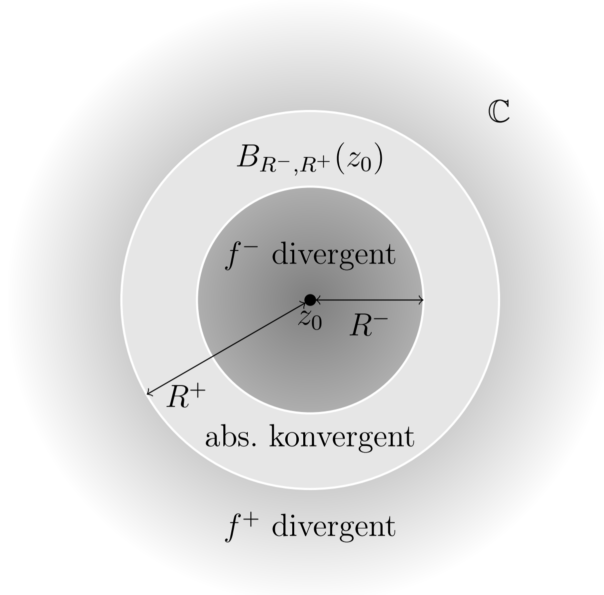
- $f^+(z)$ konvergiert für $|z-z_0| < R^+$ absolut und divergiert für $|z-z_0| > R^+$.
- $f^-(z)$ konvergiert für $|z-z_0| > R^-$ ($\iff \frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{R^-}$) absolut und divergiert für $|z-z_0| < R^-$ ($\iff \frac{1}{|z-z_0|} > R^-$).

Wir definieren daher:

Definition 8.1.2. Sei $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ eine LAURENT-Reihe und R^+ und $\frac{1}{R^-}$ die Konvergenzradien des Nebenteils f^+ und des Hauptteils f^-. Dann heißt der offene Kreisring

$$B_{R^-,R^+}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid R^- < |z-z_0| < R^+\}$$

der **Konvergenzring** der LAURENT-Reihe f. Ist $R^+ \leq R^-$ so ist der Konvergenzring leer.



Bei $R^- = 0$ und $R^+ > 0$ erhalten wir die punktierte offene Kreisscheibe $B_{0,R^+}(z_0) = B_{R^+}(z_0) \setminus \{z_0\}$. Mit diesem wichtigen Spezialfall werden wir uns im nächsten Kapitel (9. Isolierte Singularitäten) beschäftigen.

BEMERKUNG 8.1.3. Die LAURENT-Reihe konvergiert gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Kreisring um z_0, der ganz im Konvergenzring liegt. Nach Proposition 6.1.4 stellt die LAURENT-Reihe (als Summe zweier Grenzfunktionen holomorpher Funktionenfolgen) auf ihrem Konvergenzring eine holomorphe Funktion dar. Ihre komplexe Ableitung erhält man analog zu Satz 6.1.5 durch gliedweises Differenzieren

$$f'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Beispiel 8.1.4.

(a) Betrachte die LAURENT-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} z^k = \underbrace{\frac{1}{z}}_{=:f^-} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} z^k}_{=:f^+}.$$

Es gilt $R^+ = 1$ und $R^- = 0$. Die LAURENT-Reihe f konvergiert auf dem Kreisring $B_{0,1}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ absolut und stellt dort die (holomorphe) rationale Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)}$$

dar.

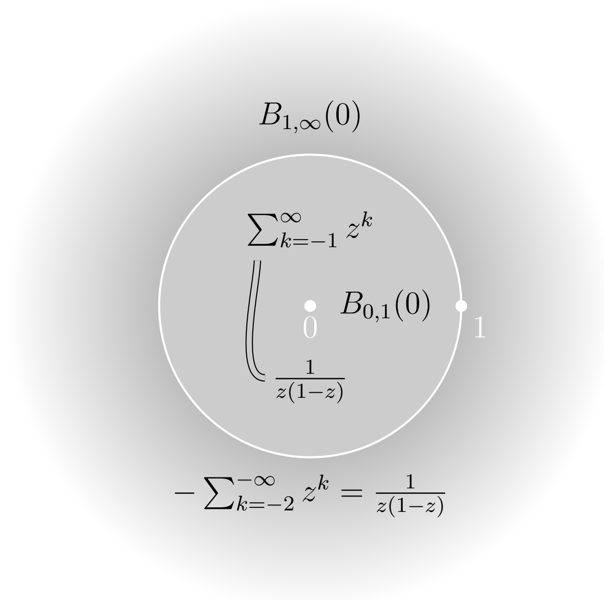
(b) Betrachte die Laurent-Reihe

$$f(z) = f^-(z) = -\sum_{k=-2}^{-\infty} z^k$$

mit $R^- = 1$ und $R^+ = \infty$, da ihr Nebenteil verschwindet, d.h. ihr Konvergenzring ist $B_{1,\infty} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z|\}$. Bemerkenswerterweise stellt auch diese Laurent-Reihe auf ihrem Konvergenzring dieselbe Funktion

$$f(z) = -\sum_{k=-2}^{-\infty} z^k = -\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{-1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{-1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z(1-z)}$$

dar.



Ende
Vorl. 9

Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches neues Jahr!

8.2. LAURENT-Reihenentwicklung holomorpher Funktionen

Wir haben schon gesehen, daß LAURENT-Reihen auf ihrem Konvergenzring holomorph sind. Wie bei Potenzreihen gilt auch die Umkehrung (in Analogie zum Satz von CAUCHY-TAYLOR (Satz 6.3.2)).

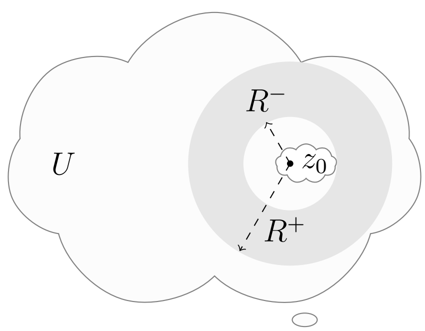
Satz 8.2.1 (LAURENT-Entwicklung holomorpher Funktionen)**.** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter seien $z_0 \in \mathbb{C}$ (nicht notwendigerweise in U) und $0 \leq R^- < R^+$ reelle Zahlen mit $B_{R^-,R^+}(z_0) \subset U$. Dann läßt sich f eindeutig in eine* LAURENT-*Reihe*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

auf dem Kreisring $B_{R^-,R^+}(z_0)$ entwickeln, deren Koeffizienten a_k durch die ***LAURENT-Koeffizientenformel***

$$(*) \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

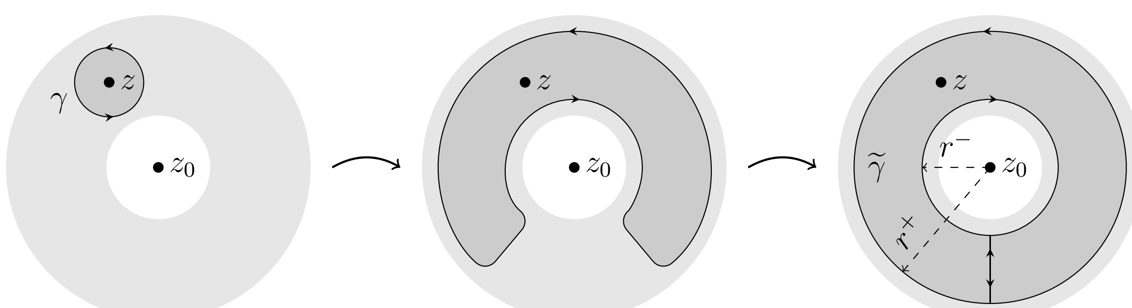
für ein beliebiges $r \in (R^-, R^+)$ bestimmt sind.



BEWEIS. Der Beweis verläuft analog zum Beweis des Satzes von CAUCHY-TAYLOR (Satz 6.3.2). Wir fangen mit einem beliebigen Punkt $z \in B_{R^-,R^+}(z_0)$ an. Nach der CAUCHYschen Integralformel (Satz 5.1.1) gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für eine positiv orientierte Kreislinie $\gamma = \partial B_\rho(z)$ mit $\overline{B_\rho(z)} \subset B_{R^-,R^+}(z_0)$.



Wegen der Homotopieinvarianz des Wegintegrals können wir γ durch den folgenden dazu homotopen Weg $\widetilde{\gamma}$ in $B_{R^-,R^+} \setminus \{z\}$ ersetzen (beachte, der Integrand ist in $\zeta = z$ im Allgemeinen nicht definiert): Für r^-, r^+ mit $R^- < r^- < |z - z_0| < r^+ < R^+$ durchlaufe den Kreis vom Radius r^+ in positiver Richtung, dann das radiale Verbindungsstück Richtung z_0, dann den Kreis vom Radius r^- in negativer Richtung und schließlich das Verbindungsstück in umgekehrter Richtung. Daher gilt

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{s^-} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{s^+}.$$

Den Summanden s^+ behandeln wir genauso wie im Beweis des Satzes von Cauchy-Taylor (Satz 6.3.2) und erhalten

$$s^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k.$$

Den Summanden s^- behandeln wir analog mit dem Unterschied, daß jetzt $\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$ ist und schreiben

$$s^- = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r^-} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} d\zeta.$$

Nach analoger Argumentation erhalten wir

$$s^- = \sum_{k=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r^-} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k.$$

Die Summe $s^- + s^+$ ist in der Tat eine Laurent-Reihenentwicklung von f um z_0 mit Hauptteil s^- und Nebenteil s^+. Um die Eindeutigkeit der Entwicklung und die Koeffizientenformel (*) zu beweisen, betrachten wir eine Laurent-Reihenentwicklung $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell (z - z_0)^\ell$ von f um z_0, die auf $B_{R^-,R^+}(z_0)$ konvergiert. Für alle Radien $r \in (R^-, R^+)$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \int_{|z - z_0| = r} (z - z_0)^{\ell - k - 1} dz \\
&\overset{\zeta := z - z_0}{=} \frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \int_{|\zeta| = r} \zeta^{\ell - k - 1} d\zeta \\
&\overset{\substack{3.2.2\ \& \\ 3.2.6.(b)}}{=} a_k
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 8.2.2. Die Taylor-Entwicklung ist ein Spezialfall der Laurent-Entwicklung. Ist nämlich f holomorph auf der Kreis*scheibe* $B_{R^+}(z_0) \neq \emptyset$, so auch $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$ für alle $k < 0$. Für ein $0 < r < R^+$ liefert dann die LAURENT-Koeffizientenformel

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = 0 \quad \text{für alle } k < 0.$$

Für $k \geq 0$ stimmen die CAUCHYsche (Satz 6.3.2) und die LAURENT-Koeffizientenformeln (Satz 8.2.1.(*)) überein.

Beispiel 8.2.3.

(a) Die Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{d\zeta}{\zeta} = 1$$

im Hauptbeispiel 3.2.2 ist auf zwei Arten Spezialfall einer Koeffizientenformel. Es ist sowohl die CAUCHYsche Koeffizientenformel (Satz 6.3.2) des 0-ten Koeffizienten a_0 der konstanten holomorphen Funktion $f(z) = 1 = \underbrace{1}_{a_0} \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^2 + \cdots$,

als auch die LAURENT-Formel (Satz 8.2.1.(*)) des (-1)-ten Koeffizienten a_{-1} der Funktion $f(z) = \frac{1}{z} = \cdots + 0 \cdot z^{-2} + \underbrace{1}_{a_{-1}} \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + \cdots$.

(b) Wie wir in Beispiel 8.1.4 gesehen haben, gibt es zwei verschiedene LAURENT-Reihenentwicklungen um $z_0 = 0$ der Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z(1-z)}$ mit zwei disjunkten offenen maximalen Konvergenzringen $B_{0,1}(0)$ und $B_{1,\infty}(0)$. Mit Hilfe der LAURENT-Koeffizientenformel (Satz 8.2.1.(*)) sind wir jetzt in der Lage beide Reihen zu konstruieren. Auf $B_{0,1}(0)$ integrieren wir entlang $\partial B_{\frac{1}{2}}(0)$ und erhalten

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-z)z^{k+2}} dz.$$

Für $k \leq -2$ ist der Integrand holomorph und $a_k = 0$ wegen des CAUCHYschen Integralsatzes. Für $k \geq -1$ wenden wir die CAUCHYsche Integralformel für Ableitungen (Satz 6.3.2) auf die Funktion $g(z) = \frac{1}{1-z}$ an und erhalten wegen

$$g^{(k)}(z) = (-1)^k \cdot (-1) \cdots (-k) \cdot \frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}},$$

daß $a_k = \frac{g^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} = \frac{(k+1)!}{(k+1)!} = 1$ und somit

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \sum_{k=-1}^{\infty} z^k,$$

wie in Beispiel 8.1.4.(a). Die Rechnung für $B_{1,\infty}(0)$ ist analog.

Übung 8.1.

(a) Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Bestimme den Konvergenzring der LAURENT-Reihe $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{|k|} z^k$. Für den Fall, daß der Konvergenzring nicht leer ist: Welche holomorphe Funktion wird durch $g(z)$ dargestellt?

(b) Bestimme die verschiedenen LAURENT-Entwicklungen der rationalen Funktion $f(z) = \frac{1}{z(1-z)(2-z)}$ auf den maximalen Konvergenzringen um $z_0 = 0$.

Nachtrag Vorl. 10

Korollar 8.2.4 (CAUCHYsche Abschätzung für LAURENT-Koeffizienten)**.** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ die eindeutige* LAURENT-*Reihenentwicklung um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Konvergenzring $B_{R^-,R^+}(z_0)$, wobei $0 \leq R^- < R^+$ ist. Für jeden Radius $r \in (R^-, R^+)$ und jeden* LAURENT-*Koeffizienten gilt*

$$|a_k| \leq \frac{1}{r^k} \cdot \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}
|a_k| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right| && \text{(LAURENT-Koeffizientenformel (8.2.1.(*)))} \\
&\leq \frac{\max_{|z-z_0|=r} |f(z)|}{2\pi r^{k+1}} \cdot 2\pi r && \text{(Lemma 3.4.2)} \\
&= \frac{1}{r^k} \cdot \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.
\end{aligned}$$

□

BEMERKUNG 8.2.5. Die CAUCHYsche Abschätzung gilt natürlich insbesondere für die TAYLOR-Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung.

KAPITEL 9

Isolierte Singularitäten

In diesem Kapitel wenden wir LAURENT-Reihen an, um sogenannte isolierte Singularitäten zu klassifizieren. Dabei geht es um das Studium von LAURENT-Reihen mit $R^- = 0$.

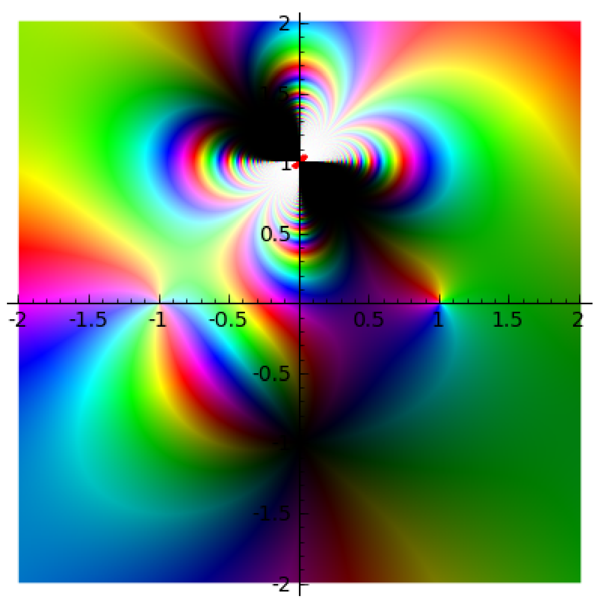
9.1. LAURENT-Reihenentwicklung isolierter Singularitäten und Ordnungen

Definition 9.1.1. Seien $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Der Punkt z_0 heißt **isolierte Singularität** von f. Ist f die Einschränkung einer auf U holomorphen Funktion, so redet man von einer **hebbaren Singularität**.

Beispiel 9.1.2. Betrache die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-i, -1, 0, 1, i\} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \frac{(z+i)^3 e^{\frac{\pi i}{(z-i)^2}} \sin z}{(z-1)z(z+1)^2}$$

mit isolierten Singularitäten $-i$, -1, 0, 1 und i.




```
sage: f(z) = (z+i)^3*exp(pi*i/(z-i)^2)*sin(z)/((z-1)*z*(z+1)^2)
sage: complex_plot( f, (-2, 2), (-2, 2), plot_points=500, figsize=[5,5] )
```

- Wegen der Funktionsvorschrift ist sofort klar, daß $-i$ eine hebbare Singularität ist.

- Wegen[1] $\lim_{z\to -1} f(z) = \infty = \lim_{z\to 1} f(z)$ sind die isolierten Singularitäten -1 und 1 nicht hebbar, da f dort nicht einmal stetig fortsetzbar ist. Noch fehlt uns die Sprache, mit der wir ausdrücken können, daß f bei -1 „singulärer" ist als bei 1.
- Wegen $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ ist f bei 0 wenigstens durch $\lim_{z\to 0} f(z) = -i^3 e^{-\pi i} = -i$ *stetig* fortsetzbar. Wir werden weiter unten sehen, daß 0 in der Tat eine hebbare Singularität ist.
- Der Grenzwert $\lim_{z\to i} f(z)$ existiert noch nicht einmal im uneigentlichen Sinne. Das sieht man am einfachsten, wenn man die Grenzwertbildung entlang der imaginären Achse betrachtet. Diese Singularität bei i scheint also noch „schlimmer" zu sein als bei 1 bzw. -1.

Die nächste Definition präzisiert die in Anführungszeichen gesteigerten Adjektive.

Ist $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, so gibt es ein $R > 0$ mit $B_{0,R}(z_0) \subset U \setminus \{z_0\}$. Somit existiert nach Satz 8.2.1 eine eindeutig bestimmte Laurent-Reihenentwicklung um die isolierte Singularität z_0

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } R^- = 0 \text{ und } R^+ \geq R > 0.$$

Dies führt uns zur nächsten Definition.

Definition 9.1.3. Seien $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ die eindeutig bestimmte Laurent-Reihenentwicklung um z_0 mit $R^- = 0$. Definiere die **Ordnung von f an z_0** durch

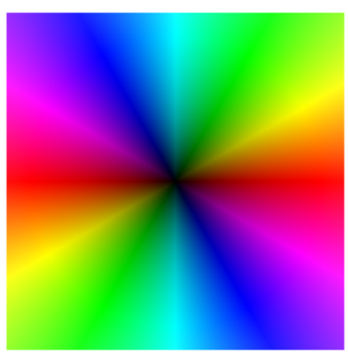
$$\operatorname{ord}_{z_0} f := \inf\{k \in \mathbb{Z} \mid a_k \neq 0\} \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Genauer, $\operatorname{ord}_{z_0} f = -\infty$ genau dann, wenn es unendlich viele negative $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a_k \neq 0$. Und genau dann ist $\operatorname{ord}_{z_0} f = \infty$, wenn alle a_k's Null sind, d.h. wenn f in einer punktierten Umgebung von z_0 identisch verschwindet.

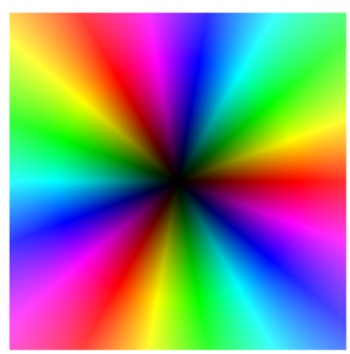
Ende Vorl. 10

- Ist $m = \operatorname{ord}_{z_0} f \in \mathbb{Z}_{>0}$, so heißt z_0 eine **Nullstelle von f der Ordnung** $m > 0$.

$f(z) = z$
$\operatorname{ord}_0 f = 1$



$f(z) = z^2$
$\operatorname{ord}_0 f = 2$

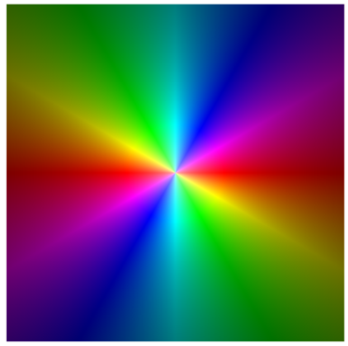


$f(z) = z^3$
$\operatorname{ord}_0 f = 3$

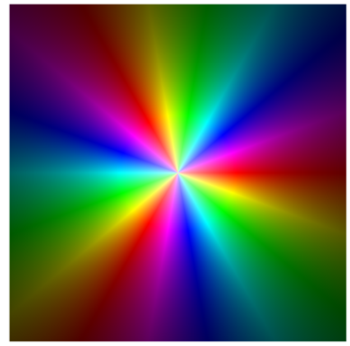
[1]Wir *definieren* $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, falls $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

- Ist $m = \operatorname{ord}_{z_0} f \in \mathbb{Z}_{<0}$, so heißt z_0 eine **Polstelle von f der Ordnung** $-m > 0$.

$f(z) = \frac{1}{z}$
$\operatorname{ord}_0 f = -1$

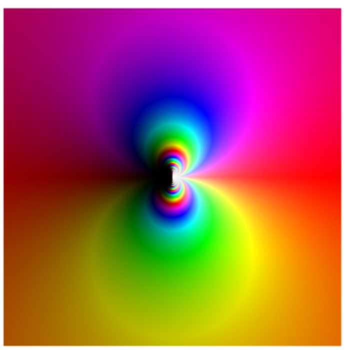


$f(z) = \frac{1}{z^2}$
$\operatorname{ord}_0 f = -2$

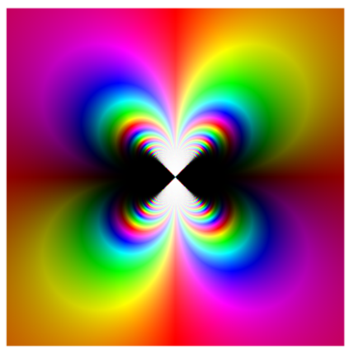


$f(z) = \frac{1}{z^3}$
$\operatorname{ord}_0 f = -3$

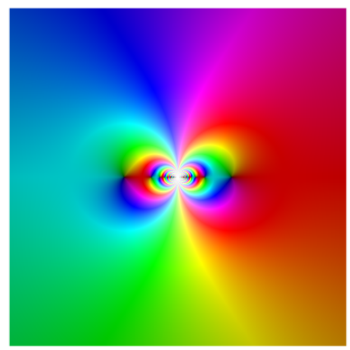
- Ist $\operatorname{ord}_{z_0} f = -\infty$, so heißt z_0 eine **wesentliche Singularität**.



$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$
$\operatorname{ord}_0 f = -\infty$



$f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$
$\operatorname{ord}_0 f = -\infty$



$f(z) = \sin \frac{1}{z}$
$\operatorname{ord}_0 f = -\infty$

Bemerkung 9.1.4. Seien $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $m := \operatorname{ord}_{z_0} f$. Weiter sei $\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ die eindeutig bestimmte Laurent-Reihenentwicklung mit $R^- = 0$.

(a) Genau dann ist die Ordnung $m = 0$, wenn f in z_0 stetig fortsetzbar ist mit $f(z_0) := a_0 \neq 0$, d.h. wenn z_0 weder eine Nullstelle noch eine Polstelle oder wesentliche Singularität von f ist.

(b) Genau dann ist die Ordnung $m \geq 0$, wenn sich f um z_0 in eine *Potenz*reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ entwickeln läßt. Aus der Charakterisierung holomorpher Funktionen als analytische Funktionen (Satz 6.5.3) folgt: z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität von f, wenn $\operatorname{ord}_{z_0} f \geq 0$ ist.

Wir wollen eine nützliche Homomorphie-Eigenschaft der Ordnung beweisen, die ihre Berechnung erheblich erleichtern wird. Dafür benötigen wir noch folgende Charakterisierung der Ordnung.

Proposition 9.1.5. *Seien $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\operatorname{ord}_{z_0} f \neq \pm\infty$. Dann ist $m := \operatorname{ord}_{z_0} f \in \mathbb{Z}$ durch folgende Eigenschaft eindeutig bestimmt: Es existiert eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ und*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \textit{für alle } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Beweis. Sei $m := \operatorname{ord}_{z_0} f \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in B_{0,R^+}(z_0) \\ &= (z - z_0)^m \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k}_{=: g(z)_{|B_{R^+}(z_0)}} . \end{aligned}$$

Definiere die auf U holomorphe Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k & \text{für } z \in B_{R^+}(z_0) \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $g(z_0) = a_m \neq 0$ ist, ist g die gesuchte Funktion.
Umgekehrt sei g eine holomorphe Funktion mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$. Entwickle g in eine Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$ um z_0. Dann ist

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k = \sum_{k=m}^{\infty} b_{k-m} (z - z_0)^k$$

die Laurent-Reihenentwicklung von f um z_0 mit $R^- = 0$ und $\operatorname{ord}_{z_0} f = m$, da $b_{m-m} = b_0 = g(z_0) \neq 0$ ist. □

Als Folgerung erhalten wir unmittelbar:

Korollar 9.1.6 (Homomorphie der Ordnung)**.** *Seien $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g, h : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\operatorname{ord}_{z_0} f \neq -\infty$ oder $\operatorname{ord}_{z_0} g \neq -\infty$ und $\operatorname{ord}_{z_0} h \neq \pm\infty$. Dann gilt*

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f \cdot g) = \operatorname{ord}_{z_0} f + \operatorname{ord}_{z_0} g \quad \textit{und} \quad \operatorname{ord}_{z_0} \frac{1}{h} = -\operatorname{ord}_{z_0} h.$$

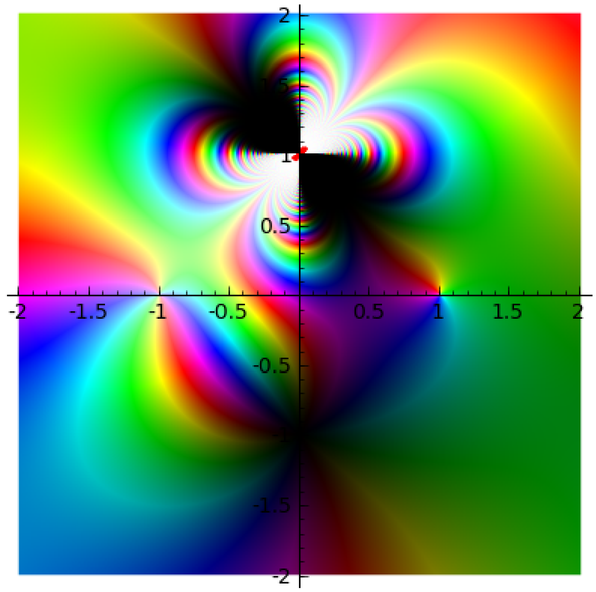
Beweis. Wende die Charakterisierung der Ordnung (Proposition 9.1.5) auf die gegebenen Funktionen an. Für die zweite Gleichung benutze die erste Gleichung in der Rechnung $0 = \operatorname{ord}_{z_0} 1 = \operatorname{ord}_{z_0} \left(h \cdot \frac{1}{h}\right) = \operatorname{ord}_{z_0} h + \operatorname{ord}_{z_0} \frac{1}{h}$. □

Das Beispiel $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ und $g(z) = z^m e^{-\frac{1}{z}}$ zeigt, warum die obige Einschränkung nötig ist.

Beispiel 9.1.7 (9.1.2 fortgeführt)**.** Betrache die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-i, -1, 0, 1, i\} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto \frac{(z+i)^3 e^{\frac{\pi i}{(z-i)^2}} \sin z}{(z-1)z(z+1)^2}$$

mit isolierten Singularitäten $-i$, -1, 0, 1 und i.



- $z_0 = -i$ ist eine Nullstelle der Ordnung

$$\operatorname{ord}_{-i} f = \operatorname{ord}_{-i}(z+i)^3 + \underbrace{\operatorname{ord}_{-i}\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{(z-i)^2}} \sin z}{(z-1)z(z+1)^2}\right)}_{=0} = \operatorname{ord}_{-i}(z+i)^{\mathbf{3}} + 0 = \mathbf{3}.$$

- Bei 1 und -1 handelt es sich um Polstellen der Ordnung 1 und 2:

$$\operatorname{ord}_1 f = \operatorname{ord}_1(z-1)^{-1} + \underbrace{\operatorname{ord}_1\left(\frac{(z+i)^3 e^{\frac{\pi i}{(z-i)^2}} \sin z}{z(z+1)^2}\right)}_{=0} = \operatorname{ord}_1(z-1)^{\mathbf{-1}} + 0 = \mathbf{-1}.$$

Analog:

$$\operatorname{ord}_{-1} f = \operatorname{ord}_{-1}(z+1)^{\mathbf{-2}} = \mathbf{-2}.$$

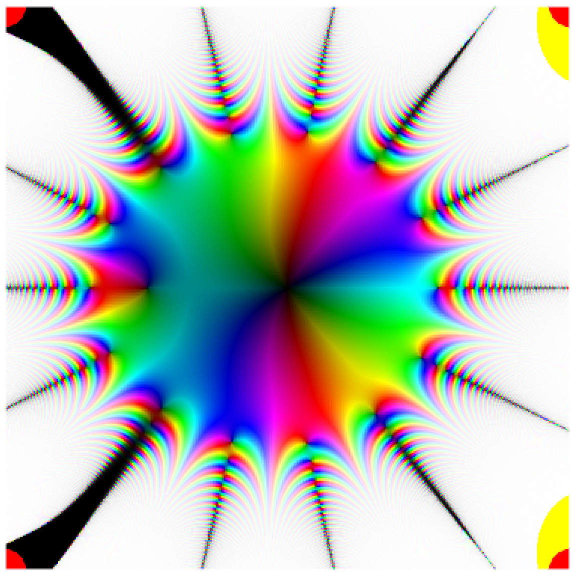
- $z_0 = 0$ ist eine hebbare Singularität, die keine Nullstelle ist:

$$\operatorname{ord}_0 f = \operatorname{ord}_0 \frac{\sin z}{z} = \operatorname{ord}_0\left(\frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \cdots\right)\right) = \operatorname{ord}_0(z^{\mathbf{0}} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \cdots) = \mathbf{0}.$$

- $z_0 = i$ ist eine wesentliche Singularität von f:
$$\operatorname{ord}_i f = \operatorname{ord}_i e^{i\pi(z-i)^{-2}} = \operatorname{ord}_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^k}{k!}(z-i)^{-2k} \right) = -\infty.$$

Übung 9.1. Für welche der folgenden Funktionsvorschriften ist $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität? Bestimme gegebenenfalls $\operatorname{ord}_0 f$:

(a) $f(z) = z^2 \cdot \log z$;
(b) $g(z) = \frac{\sin(z^6+z^7)}{e^{\cos(z^2)-1}-1}$;
(c) $h(z) = z^k \cdot e^{g(z)+\frac{1}{g(z)}}$ für $k \in \mathbb{Z}$ und g aus (b).



Zu welcher der obigen Funktionen gehört das folgende um 0 zentrierte farbige Bild? Lese die Ordnung bei 0 an den Farben ab.

Übung 9.2. Seien $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige:

(a) Ist z_0 eine Polstelle von f, so ist z_0 eine Polstelle der Ordnung 1 von $\frac{f'}{f}$.
(b) Die Funktion $e^{f(z)}$ hat keine Polstelle in z_0.

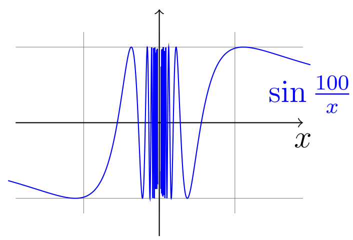
Übung 9.3. Seien $z_1, \dots, z_n \in U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige: Ist kein z_i eine wesentliche Singularität und $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, so ist f eine rationale Funktion $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit zwei Polynomen p, q mit $\deg p < \deg q$.

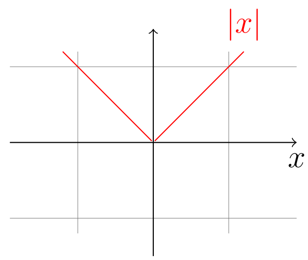
9.2. Der Riemannsche Hebbarkeitssatz und der Satz von Casorati-Weierstraß

Satz 9.2.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Seien $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist f auf einer punktierten Umgebung $B_{0,R}(z_0) \subset U \setminus \{z_0\}$ beschränkt, so ist z_0 eine hebbare Singularität.*

Beweis. Sei $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ die eindeutig bestimmte Laurent-Reihenentwicklung um z_0 mit $R^- = 0$. Laut Voraussetzung existiert ein $M > 0$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in B_{0,R}(z_0)$. Nach der Cauchyschen Abschätzung (Korollar 8.2.4) gilt $|a_k| \leq \frac{M}{r^k}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ und alle $0 < r < R$. Schickt man $r \to 0$, so erhalten wir $a_k = 0$ für alle $k < 0$. Somit ist z_0 eine hebbare Singularität (Bemerkung 9.1.4.(b)). □

Bemerkung 9.2.2. Der Riemannsche Hebbarkeitssatz ist im Reellen falsch: Weder lassen sich beschränkte Funktionen stetig fortsetzen, noch sind in x_0 stetig fortsetzbare differenzierbare (oder sogar analytische) Funktionen in x_0 differenzierbar fortsetzbar. Die Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [-1,1], x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto |x|$ sind Gegenbeispiele.





In der Tat ist im Komplexen $z \mapsto \sin\frac{1}{z}$ in keiner punktierten Umgebung von 0 beschränkt und $z \mapsto |z| = \sqrt{z\bar{z}}$ nirgends komplex differenzierbar.

Der nächste Satz erklärt die Farbenexplosion in den obigen Bildern um wesentliche Singularitäten herum. Ende Vorl. 11

Satz 9.2.3 (Casorati-Weierstrass). *Seien $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

(a) $\operatorname{ord}_{z_0} f = -\infty$, *d.h. z_0 ist eine wesentliche Singularität von f.*
(b) *Für jede Umgebung V von z_0 mit $V \subset U$ ist $f(V \setminus \{z_0\})$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f. Angenommen $f(V \setminus \{z_0\})$ sei nicht dicht in $\mathbb{C}$. Dann existiert ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $r > 0$ mit $B_r(w) \cap f(V \setminus \{z_0\}) = \emptyset$. Mit anderen Worten

$$|f(z) - w| \geq r \quad \text{für alle } z \in V \setminus \{z_0\}.$$

Somit ist die Funktion

$$g : V \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{f(z) - w}$$

holomorph und ihr Betrag durch $\frac{1}{r}$ nach oben beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (Satz 9.2.1) läßt sich g auf ganz V holomorph fortsetzen. Somit hat $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$ entweder eine hebbare Singularität in z_0 (falls $g(z_0) \neq 0$) oder einen Pol (falls $g(z_0) = 0$), dessen Ordnung gleich $\operatorname{ord}_{z_0} g$ ist; beides im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die umgekehrte Richtung sieht man wie folgt: Wäre z_0 keine wesentliche Singularität, so wäre z_0 entweder eine hebbare Singularität oder ein Pol der nicht konstanten holomorphen

Funktion f. Im ersten Fall gilt $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ und im zweiten $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Dann wäre aber das Bild $f(V \setminus \{z_0\})$ für genügend kleine Umgebungen V nicht dicht in $\mathbb{C}$. $\square$

Man kann die Aussage des Satzes weiter verschärfen. In Wahrheit wird höchstens ein Punkt in $\mathbb{C}$ ausgelassen. Das ist Inhalt eines Satzes von PICARD, den wir nicht beweisen werden.

Übung 9.4. Bestimme $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, d.h. die Menge aller holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit holomorphem Inversen f^{-1}.
Hinweis: Betrachte die isolierten Singularitäten der Funktion $f\left(\frac{1}{z}\right)$ und benutze den Satz von CASORATI-WEIERSTRASS.

KAPITEL 10

Umlaufzahlen und der Residuensatz

Unser Ziel in diesem Kapitel ist eine allgemeine Integralformel $\int_\gamma f(z)dz$ für holomorphe Funktionen mit endlich vielen isolierten Singularitäten aufzustellen und zu beweisen. Man mache sich klar, warum eine solche Formel alle bisherigen Integralformeln verallgemeinern wird:

- CAUCHYscher Integralsatz (Satz 4.2.2);
- CAUCHYsche Integralformel (Satz 5.1.1);
- Verallgemeinerte CAUCHYsche Integralformel (Satz 6.4.2);

10.1. Umlaufzahlen

Da die holomorphe Funktion $f(z) = (z - z_0)^k$ auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ außer für $k = -1$ eine Stammfunktion besitzt, ist der Exponent $k = -1$ der einzig interessante Fall (siehe Beispiel 3.2.6):

Definition 10.1.1. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Die ganze Zahl[1]

$$\operatorname{ind}_{z_0} \gamma := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \in \mathbb{Z}$$

heißt der **Index** bzw. **Umlaufzahl** von γ um z_0.

Definition 10.1.2. Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$. Definiere das **Innere von** γ als

$$\operatorname{Int} \gamma := \{z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Spur}(\gamma) \mid \operatorname{ind}_z \gamma \neq 0\}$$

und das **Äußere von** γ als

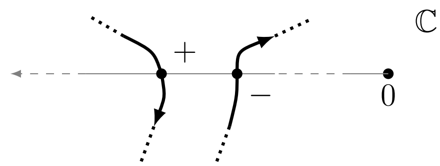
$$\operatorname{Ext} \gamma := \{z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Spur}(\gamma) \mid \operatorname{ind}_z \gamma = 0\}.$$

Der nächste Satz rechtfertigt den Namen „Umlaufzahl“. Insbesondere liefert er einen Beweis[2] für die Ganzzahligkeit der Umlaufzahl. Ohne Einschränkung können wir $z_0 = 0$ annehmen.

Satz 10.1.3. *Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, der die negative Halbachse $\mathbb{R}_{<0}$ genau $n + m$ mal schneidet, n-mal mathematisch positiv (hier, von oben nach unten) und m-mal mathematisch negativ (hier, von unten nach oben).*

[1] Siehe Übung 3.4.(c).

[2] und einen Beweis für Übung 3.4.(c,d).



Dann ist $\operatorname{ind}_0 \gamma = n - m$.

Beweis. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Parametrisierung des Weges. Laut Voraussetzung gibt es $n+m$ verschiedene Punkte $t_1^+, \ldots, t_n^+, t_1^-, \ldots, t_m^- \in [0,1]$, so daß gilt:

- $\arg \gamma(t) = \pi$ genau dann, wenn $t \in \{t_1^+, \ldots, t_n^+, t_1^-, \ldots, t_m^-\}$;
- für alle $i = 1, \ldots, n$ wechselt γ von der oberen zur unteren Halbebene bei t_i^+;
- für alle $j = 1, \ldots, m$ wechselt γ von der unteren zur oberen Halbebene bei t_j^-.

Bezeichne mit $t_1 < \ldots < t_{n+m}$ die nach Größe sortierten Punkte $t_1^+, \ldots, t_n^+, t_1^-, \ldots, t_m^-$. Weiter definiere $t_0 := 0$ und $t_{n+m+1} := 1$, die Grenzen des Intervalls $[0,1]$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
2\pi i \cdot \operatorname{ind}_0 \gamma &= \sum_{k=0}^{n+m} \int_{\gamma_{|[t_k, t_{k+1}]}} \frac{dz}{z} && \text{(Proposition 3.2.3.(b))} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=0}^{n+m} \int_{\gamma_{|[t_k+\varepsilon, t_{k+1}-\varepsilon]}} \frac{dz}{z} && \text{(Stetigkeit des Integrals)}
\end{aligned}
$$

Wir erinnern uns daran, daß die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $U_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ die Stammfunktion

$$
\log : U_- \to \mathbb{C},\ z = |z| e^{i\varphi} \mapsto \log z := \log|z| + i\varphi,
$$

hat, wobei φ den eindeutigen Winkel von z im Intervall $(-\pi, \pi)$ bezeichnet. Wir erhalten mit Lemma 3.2.5

$$
\begin{aligned}
2\pi i \cdot \operatorname{ind}_0 \gamma &= \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=0}^{n+m} \Big[\log z \Big]_{\gamma(t_k+\varepsilon)}^{\gamma(t_{k+1}-\varepsilon)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \log(\gamma(t_{k+1} - \varepsilon)) - \lim_{\varepsilon \to 0} \log(\gamma(t_k + \varepsilon)) \right).
\end{aligned}
$$

Nach der Funktionsvorschrift von log erhalten wir

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} \log(\gamma(t_\ell \mp \varepsilon)) = \begin{cases} \log|\gamma(t_\ell)| \pm i\pi & \text{falls } t_\ell = t_k^+ \text{ für ein } k \in \{1, \ldots, n\}, \\ \log|\gamma(t_\ell)| \mp i\pi & \text{falls } t_\ell = t_k^- \text{ für ein } k \in \{1, \ldots, m\}, \\ \log \gamma(1) = \log \gamma(0) & \text{falls } \ell = n+m \text{ bzw. } \ell = 0. \end{cases}
$$

Insgesamt erhalten wir

$$
2\pi i \cdot \operatorname{ind}_0 \gamma = i\pi((n-m) - (m-n)) = 2\pi i(n-m).
$$

□

Die nächste Bemerkung erlaubt uns Satz 10.1.3 viel flexibler einzusetzen.

Bemerkung 10.1.4.

(a) Die Homotopieinvarianz des Wegintegrals impliziert, daß zwei in $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ homotope geschlossene Wege dieselbe Umlaufzahl um z_0 haben müssen. Insbesondere hat ein in $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ nullhomotoper geschlossener Weg die Umlaufzahl 0 um z_0.

(b) Eine Drehung von $\mathbb{C}$ um z_0 liefert zu jedem geschlossenen Weg in $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ einen dazu in $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ homotopen Weg. Dies zeigt, daß man jeden beliebigen Strahl von z_0 aus benutzen kann, um gemäß Satz 10.1.3 die Umlaufzahl um z_0 zu bestimmen, natürlich solange dieser Strahl der Voraussetzung des Satzes genügt: Der Strahl darf nur endlich viele Schnittpunkte mit dem Weg haben und jeder Schnittpunkt muß eine einfache Überkreuzung (und weder eine mehrfache noch ein Berührpunkt) sein. Zwei solche Strahlen liefern demnach dieselbe Umlaufzahl. Man kann beweisen, daß man bei stetig differenzierbaren Wegen einen derartigen Strahl immer finden kann. Darauf wollen wir aber nicht weiter eingehen.

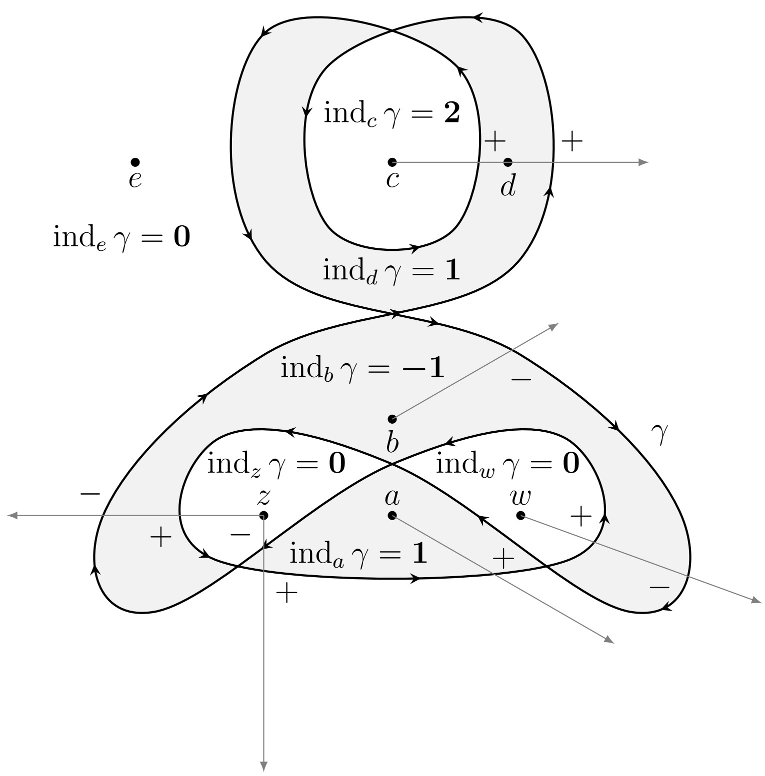


Abbildung 1. Umlaufzahlen, Homotopie und Homologie

Beispiel 10.1.5. Der Weg γ aus Abbildung 1 unterteilt $\mathbb{C}\setminus\operatorname{Spur}(\gamma)$ in sieben offene Zusammenhangskomponenten mit Vertretern z, w, a, b, c, d, e. Die Umlaufzahlen sind im Bild angedeutet.

Bemerkung 10.1.6 (Zusammenhang zu den Topologie-Vorlesungen).

(a) Man kann sogar die Aussage von Bemerkung 10.1.4.(a) umkehren und somit folgende Äquivalenz zeigen: Ein geschlossener Weg γ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ist genau dann nullhomotop, wenn $\operatorname{ind}_{z_0} \gamma = 0$ ist.

Für den Beweis braucht man den Begriff der **Fundamentalgruppe** aus der Topologie-Vorlesung. Dort zeigt man, daß die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Die Umlaufzahl

$$\operatorname{ind}_{z_0} : \pi_1 (\mathbb{C} \setminus \{z_0\}) \to \mathbb{Z}$$

realisiert diesen Gruppenisomorphismus.

(b) Analog liefert für $z \neq w \in \mathbb{C}$ die Abbildung

$$(\operatorname{ind}_z, \operatorname{ind}_w) : \pi_1 (\mathbb{C} \setminus \{z, w\}) \to \mathbb{Z}^2$$

einen Gruppenepimorphismus von der freien Gruppe $F_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid \emptyset \rangle$ vom Rang 2 auf $\mathbb{Z}^2$. Offensichtlich kann dieser Epimorphismus kein Isomorphismus sein (die Bildgruppe ist Abelsch). Der Kern ist genau die Kommutatorgruppe $\pi_1 (\mathbb{C} \setminus \{z, w\})'$. Somit ist

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 &\cong \pi_1 (\mathbb{C} \setminus \{z, w\})/\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z, w\})' \\ &=: \pi_1^{\mathrm{ab}} (\mathbb{C} \setminus \{z, w\}) \\ &=: H_1 (\mathbb{C} \setminus \{z, w\}; \mathbb{Z}) , \end{aligned}$$

die sogenannte **erste Homologiegruppe** von $\mathbb{C} \setminus \{z, w\}$ mit Werten in $\mathbb{Z}$.

Der Weg γ aus Abbildung 1 ist in $\mathbb{C}\setminus\{z, w\}$ nicht nullhomotop, obwohl $\operatorname{ind}_z \gamma = \operatorname{ind}_w \gamma = 0$ sind. In der algebraischen Topologie lernt man, daß γ in $\mathbb{C} \setminus \{z, w\}$ null**homolog** ist, sprich, als Element der ersten Homologiegruppe Null ist. Man kann sogar zeigen, daß der Weg γ die obige Kommutatorgruppe als *Normalteiler* erzeugt; er entspricht dem Kommutator $[a, b] = aba^{-1}b^{-1} \in F_2'$, der unter dem Abelschmachen auf die Null in $\mathbb{Z}^2$ abgebildet wird.

(c) Wer die Nullhomotopie von Wegen mit Hilfe von Fäden in der Ebene verstehen will, sollte bitte beachten, daß Fäden eine weitere Komplikation mit sich bringen: Bei Überkreuzungen kommt es darauf an, welches Fadensegment oben und welches unten ist (Zopf-Phänomene). Bei unseren Wegen ist das irrelevant.

10.2. Der Residuensatz

Es ist mittlerweile klar, daß beim Wegintegral $\int_\gamma \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k\right) dz$ einer Laurent-Reihe mit $R^- = 0$ entlang eines Weges γ um z_0 nur der Laurent-Koeffizient a_{-1} relevant sein kann. Daher kriegt er einen prägnanten Namen.

Definition 10.2.1. Seien $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

die nach Satz 8.2.1 eindeutig bestimmte LAURENT-Reihenentwicklung mit[3] $R^- = 0$. Definiere das **Residuum** von f an der Stelle z_0 als den Koeffizienten von $(z - z_0)^{-1}$, d.h.

$$\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1}.$$

Beispiel 10.2.2.

(a) Ist f in z_0 holomorph (fortsetzbar), so ist die LAURENT-Reihe mit $R^- = 0$ eine Potenzreihe. Daher ist $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$.
(b) Die Umkehrung ist falsch: $\operatorname{res}_{z_0} \frac{1}{(z-z_0)^2} = 0$.
(c) $\operatorname{res}_0 e^{-\frac{1}{z}} = \operatorname{res}_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{-k}}{k!} = -1$.

Die folgende Proposition liefert sehr nützliche Hilfsmittel, um Residuen zu berechnen.

Proposition 10.2.3. *Seien $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen.*

(a) Das Residuum ist linear, d.h.

$$\operatorname{res}_{z_0}(af + bg) = a \operatorname{res}_{z_0} f + b \operatorname{res}_{z_0} g \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{C}.$$

(b) Hat f an z_0 höchstens einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, d.h. ist $-m \le \operatorname{ord}_{z_0} f$, so gilt

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^m f(z) \right)^{(m-1)},$$

wobei der Exponent $(m - 1)$ die $(m - 1)$-te Ableitung bezeichnet.

(c) Sind f und g auf U holomorph, $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$, so hat $\frac{f}{g}$ einen einfachen Pol in z_0 und es gilt

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Ende Vorl. 12

BEWEIS. (a) ist trivial. (b): Nach Voraussetzung ist die eindeutige LAURENT-Reihe um z_0 mit $R^- = 0$ von der Form

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Dann ist $(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0 (z-z_0)^m + \cdots$ und die $(m-1)$-te Ableitung $((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)} = a_{-1} \cdot (m-1)! + a_0 \cdot m \cdot (m-1) \cdots 2 \cdot (z-z_0) + \cdots$. Die Grenzwertbildung $z \to z_0$ liefert die Behauptung. (c) ist eine einfache Konsequenz aus (b) mit $m = 1$. Ich lasse den Beweis als eine simple Übung. □

[3] Siehe auch Definition 9.1.3.

Beispiel 10.2.4. Die Funktion $f(z) := \frac{1-\cos z}{z^9}$ hat bei 0 einen Pol der Ordnung

$$-\operatorname{ord}_0 f = -(\operatorname{ord}_0(1-\cos z) - \operatorname{ord}_0 z^9) = -(2-9) = 7.$$

Proposition 10.2.3.(b) erlaubt uns $m = 9 \geq 7$ zu nehmen. Das Residuum von f an 0 ist daher

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_0 f &= \frac{1}{(9-1)!}\lim_{z\to 0}\left(z^9 \cdot \frac{1-\cos z}{z^9}\right)^{(9-1)} = \frac{1}{8!}\lim_{z\to 0}(1-\cos z)^{(8)} \\ &= \frac{1}{8!}\lim_{z\to 0}(-\cos z) = -\frac{1}{8!}.\end{aligned}$$

Hätten wir $m = 7$ genommen, wäre die Rechnung wesentlich komplizierter geworden.

Jetzt sind wir endlich soweit:

Satz 10.2.5 (Der Residuensatz)**.** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und* einfach zusammenhängend*, $z_1, \dots, z_\ell \in U$ verschiedene Punkte*[4] *und $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg γ in $U \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\}$*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{ind}_{z_j}\gamma \cdot \operatorname{res}_{z_j} f.$$

Beweis. Für $k = 1, \dots, \ell$ definiere f_j^- als den Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f um z_j mit $R^- = 0$. Jeder Hauptteil $f_j^- = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k^{(j)}(z-z_j)^k$ konvergiert auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$. Die Funktion

$$g : U \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) - f_1^-(z) - \dots - f_\ell^-(z).$$

ist holomorph und per Konstruktion in allen z_j's holomorph fortsetzbar, da die Laurent-Reihenentwicklung von g um jeden Punkt z_j mit $R^- = 0$ per Konstruktion von g eine Potenzreihe ist. Somit ist g auf ganz U holomorph (fortsetzbar). Da U einfach zusammenhängend ist, ist γ nullhomotop in U und es gilt

$$\begin{aligned}0 = \int_\gamma g(z)dz &= \int_\gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^{\ell}\int_\gamma f_j^-(z)dz \\ &= \int_\gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k^{(j)}\int_\gamma (z-z_j)^k dz \\ &= \int_\gamma f(z)dz - 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{\ell} a_{-1}^{(j)} \cdot \operatorname{ind}_{z_j}\gamma \qquad \text{(Beitrag nur für } k=-1) \\ &= \int_\gamma f(z)dz - 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{res}_{z_j} f \cdot \operatorname{ind}_{z_j}\gamma.\end{aligned}$$

[4]Die Endlichkeit der Menge der isolierten Singularitäten ist keine Beschränkung der Allgemeinheit. Siehe dazu [**Jän93**, Residuensatz, p. 73f].

$\square$

BEMERKUNG 10.2.6. Der Residuensatz impliziert die verallgemeinerte CAUCHYsche Integralformel (Satz 6.4.2):
Seien G ein einfach zusammenhängendes Gebiet[5] und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter seien $z \in G$ und γ ein geschlossener Weg in $G \setminus \{z\}$. Nach dem Residuensatz gilt für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = 2\pi i \cdot \operatorname{ind}_z \gamma \cdot \operatorname{res}_z \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

Das Residuum berechnen wir mit Proposition 10.2.3.(b) für $m = k + 1$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_z \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} &= \frac{1}{k!} \cdot \lim_{\zeta \to z} \left((\zeta - z)^{k+1} \cdot \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \right)^{(k)} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \lim_{\zeta \to z} f^{(k)}(\zeta) \\ &= \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(z) \end{aligned}$$

Für $\operatorname{ind}_z \gamma = 1$ erhalten wir die verallgemeinerte CAUCHYsche Integralformel

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Beispiel 10.2.7. Wir bestimmen das Wegintegral

$$\int_\gamma f(z) dz \qquad \text{für} \qquad f(z) = \frac{\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right)}{\sin z}$$

entlang des Weges γ aus Abbildung 2. Der Integrand ist nur an den isolierten Stellen $-1, 1$ und $\ell\pi$ für $\ell \in \mathbb{Z}$ singulär. Die drei von γ betroffenen isolierten Singularitäten sind $-1, 0, 1$ mit Umlaufzahlen wie in der Beschriftung von Abbildung 2. Nach dem Residuensatz (Satz 10.2.5) gilt

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \cdot \left(\underbrace{\operatorname{ind}_{-1} \gamma}_{=0} \cdot \operatorname{res}_{-1} f + \underbrace{\operatorname{ind}_0 \gamma}_{=1} \cdot \operatorname{res}_0 f + \underbrace{\operatorname{ind}_1 \gamma}_{=0} \cdot \operatorname{res}_1 f \right).$$

Also ist nur das Residuum bei 0 relevant. Wir berechnen es mit Proposition 10.2.3.(c) und erhalten

$$\operatorname{res}_0 \left(\frac{\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right)}{\sin z} \right) = \frac{\exp\left(\frac{1}{0^2-1}\right)}{\sin' 0} = \frac{e^{-1}}{\cos 0} = e^{-1}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_\gamma \frac{\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right)}{\sin z} dz = \frac{2\pi i}{e}.$$

[5] Hier spielt G die Rolle von $B_r(z_0)$ in Satz 6.4.2.

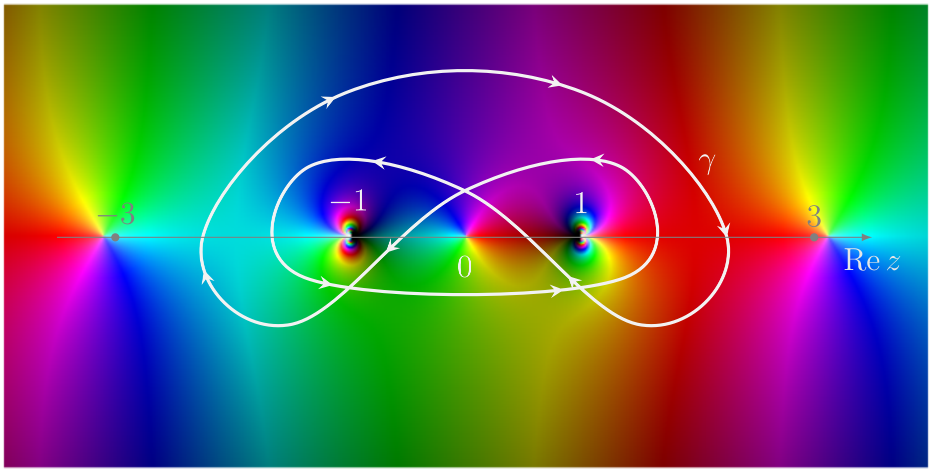


ABBILDUNG 2. $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right) / \sin z$ $\quad$ ($\operatorname{ind}_{-1}\gamma = \operatorname{ind}_1\gamma = 0$, $\operatorname{ind}_0\gamma = 1$)

Übung 10.1. Bestimme das Wegintegral

$$\int_\gamma \frac{\exp\left(\frac{1}{\sin z}\right)}{1-z^2} dz$$

entlang des Weges γ aus Abbildung 3.

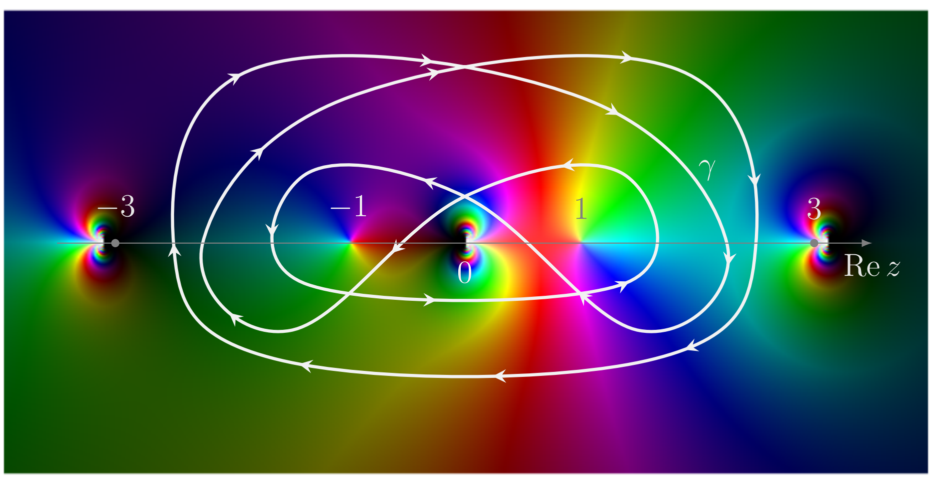
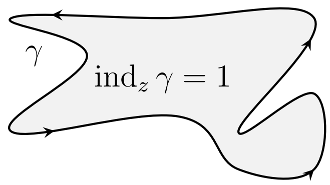


ABBILDUNG 3. $f(z) = \exp\left(\frac{1}{\sin z}\right) / (1-z^2)$

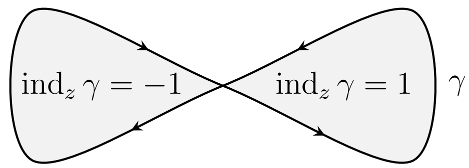
Übung 10.2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$, und $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige: Das Residuum $\operatorname{res}_{z_0} f$ ist die eindeutige Zahl $a \in \mathbb{C}$, für die die Funktion $f(z) - \frac{a}{z-z_0}$ eine Stammfunktion auf $G \setminus \{z_0\}$ besitzt.

Wir beenden dieses Kapitel mit einer speziellen Version des Residuensatzes. Dafür brauchen wir eine Definition.

Definition 10.2.8. Eine geschlossene Kurve γ in $\mathbb{C}$ heißt **Randkurve**, falls für alle $z \in \operatorname{Int}\gamma$ gilt $\operatorname{ind}_z \gamma = 1$.



Randkurve



keine Randkurve

Korollar 10.2.9 (Residuensatz für Randkurven)**.** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und f auf U bis auf endlich viele isolierte Singularitäten holomorph. Ist γ eine Randkurve in U, die die Singularitäten von f meidet, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{z \in \operatorname{Int}\gamma} \operatorname{res}_z f.$$

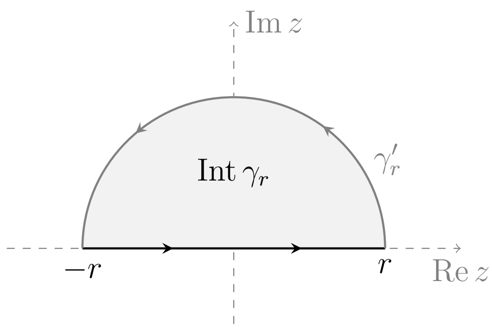
Beweis. Wende den Residuensatz (Satz 10.2.5) an und benutze $\operatorname{ind}_z \gamma = 1$ für alle $z \in \operatorname{Int}\gamma$. Benutze zusätzlich Beispiel 10.2.2.(a). $\square$

KAPITEL 11

Anwendungen des Residuensatzes

11.1. Berechnung uneigentlicher reeller Integrale mit dem Residuensatz

In diesem Abschnitt setzen wir den Residuensatz ein, um spezielle uneigentliche reelle Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx$ zu bestimmen. Natürlich kann man nicht erwarten, daß man alle reellen Integranden mit komplexen Methoden behandeln kann. Eine Mindestvoraussetzung wäre, daß die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Einschränkung einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \subset U$ sein muß (vgl. Übung 7.4).



Die Idee ist wie folgt. Setze das reelle Intervall $[-r, r]$ zu einer Randkurve $\gamma_r := [-r, r] * \gamma_r'$ so ins Komplexe fort, daß $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r'} f(z)dz = 0$ wird. Dies wird z.B. dann eintreten, wenn $\lim_{z\to\infty} f(z)$ schnell genug verschwindet. Dann ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz$. Hat f zusätzlich in der **oberen Halbebene**

$$H_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

nur endlich viele Singularitäten, die alle isoliert sind, so folgern wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{z\in H_+} \operatorname{res}_z f.$$

Typischerweise studiert man spezielle Klassen holomorpher Funktionen, bei denen genau dies eintritt. Wir beschränken uns auf eine Teilklasse der rationalen Funktionen. Dazu benötigen wir eine Definition.

Definition 11.1.1. Der **Grad** einer rationalen Funktion $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ist definiert als

$$\deg f = \deg p - \deg q.$$

Lemma 11.1.2. *Sei f eine rationale Funktion vom Grad n. Dann existieren reelle Zahlen $r, c > 0$ mit*

$$|f(z)| \leq c \cdot |z|^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq r.$$

Beweis. Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit $p(z) = a_d z^d + \cdots + a_0$ und $q(z) = b_e z^e + \cdots + b_0$ und $a_d \neq 0 \neq b_e$, d.h. mit $n = d - e$. Dann ist

$$|f(z)| = \left| \frac{z^d(a_d + \cdots + a_0 z^{-d})}{z^e(b_e + \cdots + b_0 z^{-e})} \right| = |z|^n \underbrace{\left| \frac{a_d + \cdots + a_0 z^{-d}}{b_e + \cdots + b_0 z^{-e}} \right|}_{R(z)}.$$

Da $\lim_{z\to\infty} R(z) = \frac{|a_d|}{|b_e|}$ ist, existiert für $c := \frac{|a_d|}{|b_e|} + 1$ ein $r > 0$, welches die Behauptung erfüllt. □

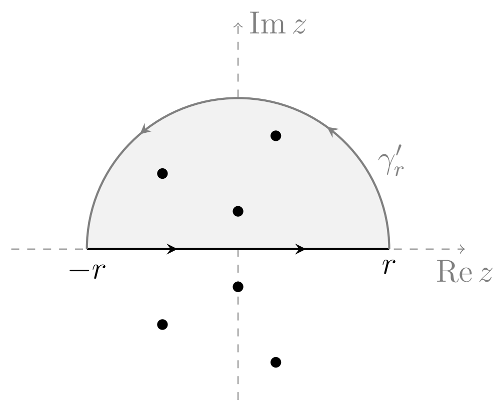
Jetzt kommen wir zur angekündigten Anwendung.

Satz 11.1.3. *Sei f eine rationale Funktion mit reellen Koeffizienten und* $\deg f \leq -2$. *Besitzt f auf der reellen Achse keine Polstellen, dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{z \in H_+} \operatorname{res}_z f.$$

Ende
Vorl. 13

Beweis. Seien $r, c > 0$ wie in Lemma 11.1.2. Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß alle Polstellen von f in H_+ im oberen Halbkreis $\operatorname{Int} \gamma_r$ bereits enthalten sind, wobei $\gamma_r = [-r, r] * \gamma_r'$, und γ_r' der obere Halbkreis ist (sonst vergrößere r).



Nach dem Residuensatz für Randkurven (Korollar 10.2.9) gilt

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{\gamma_r'} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{z \in H_+} \operatorname{res}_z f.$$

Das zweite Integral schätzen wir mit Lemma 3.4.2 nach oben ab und erhalten

$$\left| \int_{\gamma_r'} f(z)dz \right| \leq \ell(\gamma_r') \cdot \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \pi r \cdot cr^n = \pi c r^{n+1}.$$

Wegen $n \le -2$ ist $\lim_{r\to\infty} \pi c r^{n+1} = 0$ und wir erhalten

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{z\in H_+} \operatorname{res}_z f.$$

□

Beispiel 11.1.4. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachte das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Die Voraussetzung des Satzes 11.1.3 sind erfüllt und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{ia} \frac{1}{(z^2+a^2)^n}.$$

Die Polstelle ia hat die Ordnung n und wir rechnen mit Proposition 10.2.3.(b) nach

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{ia} \frac{1}{(z^2+a^2)^n} &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z\to ia} \left((z-ia)^n \cdot \frac{1}{(z^2+a^2)^n} \right)^{(n-1)} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z\to ia} \left((z+ia)^{-n} \right)^{(n-1)} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z\to ia} (-n)\cdots(-2n+2) \cdot (z+ia)^{-2n+1} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \cdot (2ia)^{-2n+1} \\
&= \frac{1}{i(2a)^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2\pi}{(2a)^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Obwohl das obige Integral mit Hilfe der Stammfunktion berechnet werden kann, ist dies jedoch wesentlich aufwendiger. Beim Berechnen der folgenden reellen Integrale ist man aber auf die komplexe Welt angewiesen:

Satz 11.1.5. *Sei f eine rationale Funktion mit reellen Koeffizienten und* $\deg f \le -2$. *Besitzt f auf der reellen Achse keine Polstellen, dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x dx = 2\pi i \cdot \sum_{z\in H_+} \operatorname{res}_z \left(f(z)e^{iz} \right).$$

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zum vorigen Beweis. Die Abschätzung des zweiten Summanden mit Lemma 3.4.2 sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_r'} f(z)e^{iz}dz\right| &\leq \ell(\gamma_r')\cdot \max_{|z|=r,\operatorname{Im} z\geq 0}\left|f(z)e^{iz}\right|\\ &\leq \pi r\cdot \max_{|z|=r}|f(z)|\max_{\operatorname{Im} z\geq 0}\left|e^{iz}\right|\\ &\leq \pi r\cdot cr^n\max_{\operatorname{Im} z\geq 0}\left|e^{i\operatorname{Re} z-\operatorname{Im} z}\right|\\ &= \pi c r^{n+1}\underbrace{\max_{\operatorname{Im} z\geq 0} e^{-\operatorname{Im} z}}_{=1}.\end{aligned}$$

Für $r\to\infty$ strebt die linke Seite wegen $n\leq -2$ gegen Null. □

Beispiel 11.1.6. Als Anwendung bestimmen wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx.$$

Das Residuum bei i ist

$$\operatorname{res}_i\frac{e^{iz}}{1+z^2}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}=\frac{e^{-1}}{2i}.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx=\operatorname{Re}\left(2\pi i\frac{e^{-1}}{2i}\right)=\frac{\pi}{e}.$$

Übung 11.1. Bestimme das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}dx.$$

Für weitere Beispiele von unbestimmten reellen Integralen, die man mit Hilfe des Residuensatzes berechnen kann, siehe [**Jän93**, Kapitel 7]. Für einige von ihnen kennt man keine reelle Integrationsmethode.

11.2. Abzählen von Null- und Polstellen

Das folgende Lemma stellt den Zusammenhang zwischen der Ordnung und dem Residuum her.

Lemma 11.2.1. *Seien $z_0\in U\subset\mathbb{C}$, $f: U\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ holomorph mit $\operatorname{ord}_{z_0} f\neq\pm\infty$. Dann gilt*

$$\operatorname{ord}_{z_0} f=\operatorname{res}_{z_0}\frac{f'}{f}.$$

Beweis. Die Beweisidee ist die von Übung 9.2.(a). Nach Proposition 9.1.5 schreiben wir

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z)\quad\text{ für alle } z\in U\setminus\{z_0\}$$

für $m := \operatorname{ord}_{z_0} f > -\infty$ und $g : U \to \mathbb{C}$ holomorph Funktion mit $g(z_0) \neq 0$. Für die erste Ableitung gilt

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z) \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{z_0\},$$

oder äquivalent,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Da $\frac{g'(z)}{g(z)}$ holomorph ist, ist der Hauptteil der LAURENT-Reihenentwicklung von $\frac{f'}{f}$ um z_0 genau $m(z - z_0)^{-1}$ und die Behauptung ist bewiesen. □

Das folgende Integral zählt Null- und Polstellen von f mit Vielfachheiten. Darüber hinaus wird ein Zusammenhang zur Umlaufzahl um 0 von Bildern von Randkurven unter f hergestellt.

Satz 11.2.2. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und f eine Funktion, die auf U bis auf endlich viele Polstellen holomorph ist. Weiter sei γ eine Randkurve in U, die die Pol- und Nullstellen von f meidet. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\sum_{z \in \operatorname{Int} \gamma} \operatorname{ord}_z f &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \operatorname{ind}_0(f \circ \gamma).\end{aligned}$$

*Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ nennen wir daher das **Zählintegral**.*

BEWEIS. Aus dem Residuensatz für Randkurven (Korollar 10.2.9) und Lemma 11.2.1 ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum_{z \in \operatorname{Int} \gamma} \operatorname{res}_z \frac{f'}{f} = \sum_{z \in \operatorname{Int} \gamma} \operatorname{ord}_z f.$$

Die zweite Gleichheit folgt aus der Definition der Umlaufzahl

$$\operatorname{ind}_0(f \circ \gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

□

Beispiel 11.2.3. Die Polynomfunktion $g(z) = z^n$ hat nur bei 0 eine Nullstelle der Ordnung n. Ist γ eine Parametrisierung von $\partial B_r(0)$, so ist die Umlaufzahl von $g \circ \gamma$ um 0 ebenfalls n. Wir rechnen nach

$$\sum_{z \in B_r(0)} \operatorname{ord}_z g = \operatorname{ind}_0(g \circ \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{n z^{n-1}}{z^n} = \frac{n}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = n.$$

Das Zählintegral liefert einen weiteren Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra. Im folgenden skizzieren die Idee. Sei $f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom der Ordnung n. Wir wissen, daß sich $f(z)$ weit draußen wie $g(z) = z^n$ verhält, insbesondere werden für $\gamma_r := \partial B_r(0)$ die Kurven $f \circ \gamma_r$ und $g \circ \gamma_r$ bei großem r nah beieinander liegen. Daher wird $f \circ \gamma_r$ die 0 ebenfalls genau n mal umlaufen, wonach g ebenfalls n Nullstellen in $\operatorname{Int} \gamma_r$

haben muß. Und da wir hier im Grunde nur mit der topologischen Umlaufzahl argumentiert haben, ist dies sogar die Idee eines rein topologischen Beweises des Fundamentalsatz der Algebra.

Diese Diskussion läßt sich wie folgt präzisieren.

Satz 11.2.4 (Satz von ROUCHÉ)**.** *Seien* $f, g : G \to \mathbb{C}$ *zwei auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet* G *holomorphe Funktionen und* γ *eine Randkurve in* $\mathbb{C}$*. Gilt*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

für alle $z \in \operatorname{Spur} \gamma$*, so folgt*

$$\sum_{z \in \operatorname{Int} \gamma} \operatorname{ord}_z f = \sum_{z \in \operatorname{Int} \gamma} \operatorname{ord}_z g.$$

BEWEIS. Definiere die Homotopie

$$h_t : U \to \mathbb{C}, z \mapsto g(z) + t(f(z) - g(z)) \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

Es gilt $h_0 = g$ und $h_1 = f$. Für alle $t \in [0, 1]$ und alle $z \in \operatorname{Spur} \gamma$ gilt die Ungleichung

$$|h_t(z)| = |g(z)| - |t||f(z) - g(z)| \geq |g(z)| - |f(z) - g(z)| > 0.$$

Somit ist das Zählintegral

$$N(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} dz$$

wohldefiniert, stetig in t und ganzzahlig. Daher gilt $N(0) = N(1)$, was zu beweisen war. □

Übung 11.2. Benutze die obige Diskussion und den Satz von ROUCHÉ um den Fundamentalsatzes der Algebra neu zu beweisen.

Literaturverzeichnis

[Dec11] Wolfram Decker, *Einführung in die Funktionentheorie*, Skript zur Vorlesung im WS 2010/11, (`http://www.mathematik.uni-kl.de/~decker/Lehre/WS10/Funktionentheorie/`), 2011.

[FB93] Eberhard Freitag and Rolf Busam, *Funktionentheorie*, Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 1993. MR 1250380 (94j:30001)

[FL80] Wolfgang Fischer and Ingo Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course], vol. 47, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1980, Aufbaukurs Mathematik. MR 554918 (81e:30001)

[Gat09] Andreas Gathmann, *Einführung in die Funktionentheorie*, Skript zur Vorlesung im WS 2008/09, (`http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/futheo.php`), 2009. 3

[Jän93] Klaus Jänich, *Funktionentheorie*, third ed., Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 1993, Eine Einführung. [An introduction]. MR 1231973 72, 80

[Rem84] Reinhold Remmert, *Funktionentheorie. I*, Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics], vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1984. MR 753290 (85h:30001)

Index