

Sommersemester 2014

1. Übungsblatt zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Abgabetermin: 24. April, 15:30, vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1. Beweise: Der 3-dimensionale “Anschauungsraum” (Beispiel 1.1.3.(a)) ist eine zusammenhängende Geometrie vom Rang 3.

Aufgabe 2. Sei Ω eine endliche Geometrie. Eine **Inzidenzmatrix** ist eine Matrix $m = (m_{xy})_{x,y \in \Omega}$, deren Zeilen und Spalten durch die Elemente von Ω indiziert werden mit der Vorschrift, dass

$$m_{xy} := \begin{cases} 1, & \text{falls } xIy, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (1) Welcher Teil der Inzidenzmatrix ist bei gleicher Anordnung von Zeilen und Spalten interessant?
- (2) Bestimme die Inzidenzmatrix und den Graphen der “Tetraedergeometrie”.
- (3) Welche Teile der Inzidenzmatrix sind bei einer Rang r Geometrie interessant und wie müsste man die Zeilen und Spalten dafür anordnen?
- (4) Diskutiere dies am Beispiel der “Tetraedergeometrie”.
- (5) Was beobachtet man, wenn man beim Graphen der “Tetraedergeometrie” die Elemente nach Typ sortiert, z.B. indem man alle Elemente vom gleichen Typ auf einer Höhe zeichnet?

Definition Sei (Ω, I) eine Inzidenzgeometrie. Ein **Automorphismus** von (Ω, I) ist eine bijektive Abbildung $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$, die I respektiert, d.h., $xIy \iff \varphi(x)I\varphi(y)$. Die Menge $\text{Aut}(\Omega)$ der Automorphismen von Ω ist eine Gruppe mit der Komposition als Verknüpfung, die sogenannte **Automorphismengruppe** von Ω . Die Geometrie (oder die Automorphismengruppe) heisst **Kammer-transitiv**, falls $\text{Aut}(\Omega)$ auf der Menge der Kammern transitiv operiert.

Aufgabe 3. Beweise folgende Aussagen:

- (1) $\text{Aut}(\Omega)$ ist eine Gruppe mit der Komposition als Verknüpfung.
- (2) Die Automorphismengruppe der “Tetraedergeometrie” ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4 .
- (3) Die “Tetraedergeometrie” ist Kammer-transitiv.

Hinweis: Zeige, dass die “Tetraedergeometrie” genau 24 Kammern besitzt und setze sie in bijektive Relation zu den 24 Permutationen in S_4 .