
Einführung in die

Topologie

PD Dr. Mohamed Barakat
(Skript erstellt von Felix Boos)

TU Kaiserslautern
SS 2010

7. Oktober 2010

Vorwort

Das vorliegende Skript entstand bei meiner Vorbereitung auf die Prüfung zur Vorlesung „Einführung in die Topologie“ im Sommersemester 2010 an der TU Kaiserslautern, gehalten von Mohamed Barakat. Im Wesentlichen entspricht das Skript einfach der Vorlesung. Wo es mir angemessen erschien, habe ich die Struktur des Skriptes gegenüber der Vorlesung leicht verändert, Beispiele und Erklärungen hinzugefügt. Die „gravierendsten“ Änderungen betreffen den Anfang von Kapitel 6, „Homotopie“. An dieser Stelle weicht das Skript schon recht deutlich von der Vorlesung ab, und ich habe ein paar (wenige) neue Begriffe und Zusammenhänge hinzugefügt. Diese Zusätze hätte ich nicht ins Skript aufgenommen, wenn sie mir nicht selbst das Verständnis erleichtert hätten – ich hoffe, dass Ihr es genauso seht. Beachtet bitte, dass auch die Nummerierung der Beispiele, Sätze, Definitionen usw. oft nicht exakt mit der aus der Vorlesung übereinstimmt.

Dieses Skript ist mit Sicherheit noch voller Fehler, Ihr solltet also keinesfalls *nur* mit dem Skript lernen! Wenn Ihr Fehler findet (egal was für welche), wäre es toll, wenn Ihr mir Bescheid sagen könntet¹. Im Übrigen wäre das Skript eigentlich noch im Entstehen, wenn nicht schon bald die Prüfungen wären... Einige Aspekte der Vorlesung habe ich deswegen nur sehr schlecht oder auch gar nicht näher erläutert, obwohl das angemessen wäre. Wenn Ihr Ideen habt, wie man diese Stellen verbessern oder ergänzen könnte, nehme ich sie gerne ins Skript auf, dann haben alle was davon :-)

Ich möchte mich an dieser Stelle noch einmal herzlich bei Mohamed für seine Unterstützung bedanken, die es mir ermöglicht hat, den Stoff nachzuvollziehen (und damit letztlich auch dieses Skript zu schreiben), ohne die Vorlesung besuchen zu können.

Felix

¹z.B. per Mail: boos.felix@gmail.com

Inhaltsverzeichnis

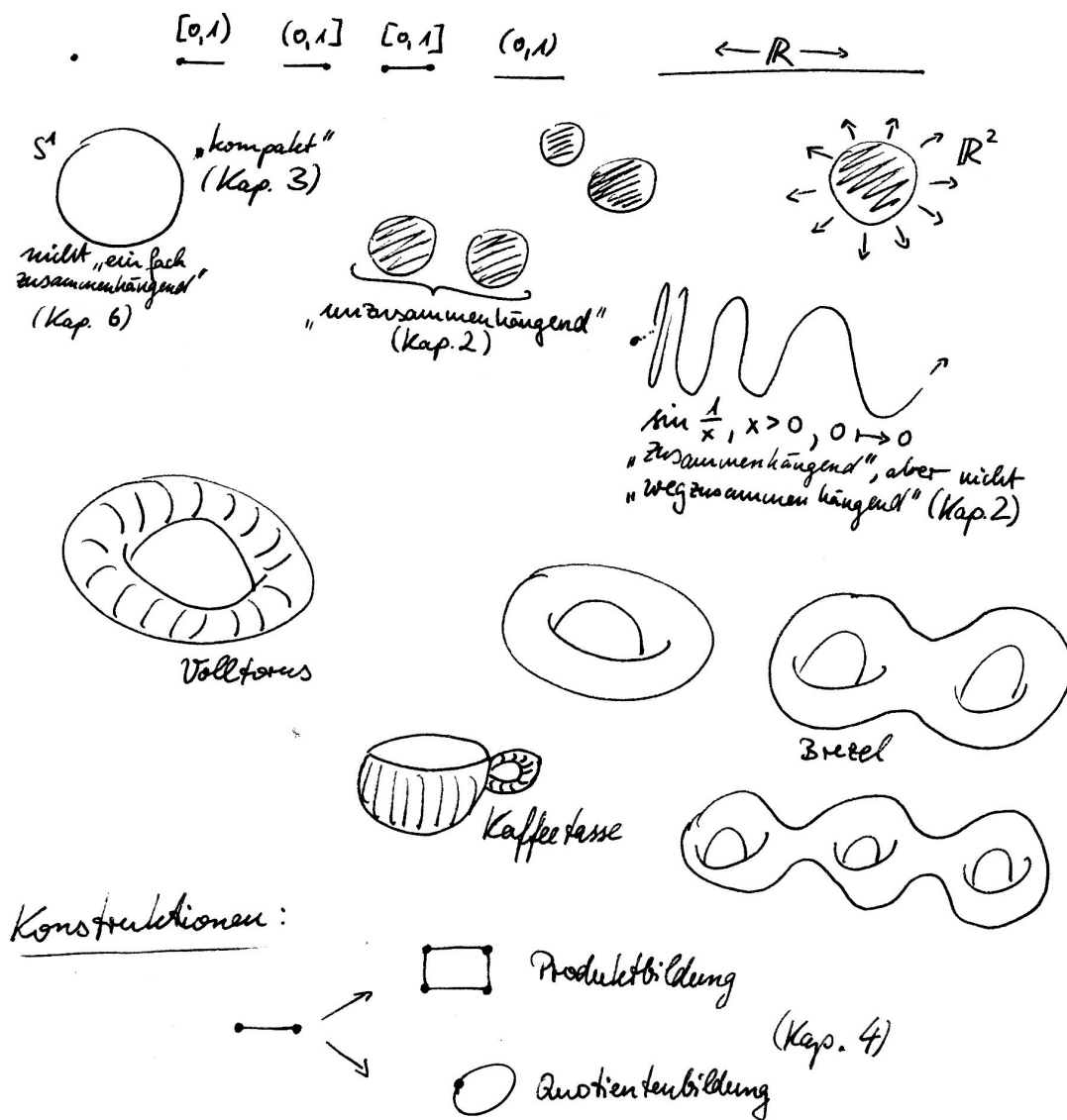
0. Einführung	5
0.1. Motivation	5
0.2. Verwendete Schreibweisen	6
0.3. Metrische Räume	6
 I. Mengentheoretische Topologie	 9
1. Topologische Räume	11
1.1. Topologie, Topologische Räume, Beispiele	11
1.2. Umgebungen	16
1.3. Ausgezeichnete Mengen und Punkte	18
1.4. Stetige Abbildungen	20
2. Zusammenhang, Wegzusammenhang, Irreduzibilität und Trennungsaxiome	25
2.1. Zusammenhängende Räume	25
2.2. Wegzusammenhang	27
2.3. Irreduzibilität	30
2.4. Trennungsaxiome	31
3. Kompaktheit	35
3.1. Kompakte Räume	35
3.2. Kompaktifizierung	38
4. Konstruktion topologischer Räume	43
4.1. Produkte	43
4.2. Quotienten	45
4.3. Beispiele für Quotiententopologien	48
5. Vollständige metrische Räume	53
5.1. Vervollständigung metrischer Räume	53
5.2. Der Satz von Baire	56
 II. Algebraische Topologie	 59
6. Homotopie	61
6.1. Homotopie von Abbildungen	61
6.2. Die Fundamentalgruppe	67
6.3. Der induzierte Homomorphismus	71
6.4. Homotopieäquivalenz der Fundamentalgruppe	74
7. Überlagerungen	77
7.1. Überlagerungsabbildungen	77
7.2. Das Liftungsproblem	78
7.3. Universelle Überlagerungen	80

0. Einführung

In diesem dem eigentlichen Vorlesungsstoff vorangestellten Abschnitt wollen wir zunächst einen Einblick geben, um was es in der Vorlesung „Einführung in die Topologie“ und damit natürlich auch in diesem Skript gehen wird. Außerdem werden wir einige Begriffe und Schreibweisen definieren, die im folgenden Text häufig benutzt werden, aber selbst nicht direkt Gegenstand der Betrachtung sind. Eine Ausnahme bildet die Definition des metrischen Raumes, der im Laufe des Studiums der Topologie eine große Rolle spielt. Ich habe mich entschieden, die Definition samt einiger Beispiele an den Anfang dieses Skripts zu stellen, obwohl metrische Räume in der Vorlesung erst ein kleinwenig später eingeführt wurden.

0.1. Motivation

Die folgende Graphik soll Euch einen Überblick über Objekte und Begriffe geben, mit denen in der Topologie gearbeitet wird, und was diese anschaulich bedeuten. Wie man am künstlerischen Niveau leicht ablesen kann, habe ich sie selbst gezeichnet :-)



0.2. Verwendete Schreibweisen

Dieser Abschnitt dient dazu, vorab zu klären, wie wir gewisse Dinge symbolisch ausdrücken werden. Das meiste dürfte Ihr gewohnt sein, das ein oder andere schreibt doch jeder anders (etwa $\subset$ statt $\subseteq$).

- die *Vereinigung* von Mengen: $A \cup B$ oder $\bigcup_{i \in I} A_i$ für eine Indexmenge I
- die *disjunkte Vereinigung* von Mengen: $A \dot{\cup} B$ (d.h. wir betonen die Eigenschaft $A \cap B = \emptyset$)
- den *Schnitt* von Mengen: $A \cap B$ oder $\bigcap_{i \in I} A_i$
- die *Differenz* von Mengen: $A \setminus B$
- A ist eine *Teilmenge* von B (Inklusion): $A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$
- A ist eine *echte Teilmenge* von B (d.h. $A \subseteq B$ und $A \neq B$): $A \subsetneq B$ oder $B \supsetneq A$
- die *Potenzmenge* (d.h. Menge aller Teilmengen): $\mathcal{Pot}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$
- die *leere Menge*: $\emptyset$
- abgeschlossene Intervalle: $[a, b]$
- offene bzw. halboffene Intervalle: $]a, b[$ bzw. $[a, b[$ oder $]a, b]$

0.3. Metrische Räume

Metrische Räume sind Mengen von Punkten, für die es ein numerisches Maß für den Abstand zweier Punkte gibt. Für wohlbekannte Mengen wie etwa den $\mathbb{R}^3$ haben wir eine gute Vorstellung vom „Abstand“ oder der „Distanz“ von Punkten. Da wir in der Topologie aber allgemeine Mengen betrachten, die uns weit weniger vertraut sein könnten, benötigen wir eine Verallgemeinerung des Abstandsbegriffes. Wir beginnen also mit der abstrakten Definition einer *Metrik*, welche uns als „allgemeine Abstandsfunktion“ dienen wird.

Definition:

Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in X$:

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (Symmetrie)}$$

$$(M3) \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

Das Paar (X, d) nennt man einen **metrischen Raum**.

Aus diesen Axiomen folgt übrigens sinnvollerweise noch $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

Die genannten Eigenschaften, die eine Metrik haben muss, sind also sehr einleuchtend: Negative Abstände sind ebenso „sinnlos“ wie unsymmetrische. Die Dreiecksungleichung dürfte wohlbekannt sein und schließt „Abkürzungen“ für den Weg zwischen zwei Punkten aus.

Zur Demonstration werden wir zunächst das wohl anschaulichste Beispiel für eine Metrik betrachten:

Beispiel 1:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für beliebige Punkte $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ des $\mathbb{R}^n$ ist die **Euklidische Metrik** definiert durch

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

Das ist anschaulich also der Abstand der Punkte x und y des $\mathbb{R}^n$ „in Luftlinie“.

Macht Euch klar, dass die Axiome aus der Definition für die Euklidische Metrik tatsächlich erfüllt sind: Abstände zwischen Punkten sind nie negativ und nur dann gleich Null, wenn die Punkte übereinstimmen (M1). Der Abstand von x nach y ist identisch mit dem Abstand von y nach x (M2). Und auch die Dreiecksungleichung (M3) gilt, wie man mit ein bisschen Rechnen relativ schnell herausbekommt (Gleichheit gilt genau für kollineare Punkte x, y, z). Durch die Euklidische Metrik d wird $(\mathbb{R}^n, d)$ zu einem metrischen Raum.

Beispiel 2:

Eine weitere, ungewöhnliche Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ ist folgendermaßen definiert: Sei $p \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt. Dann ist

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & , \text{ falls } x, y \text{ und } p \text{ auf einer Geraden liegen} \\ \|x - p\| + \|p - y\| & , \text{ sonst} \end{cases}$$

eine Metrik, die sogenannte „SNCF-Metrik“ (oder „Französische Eisenbahnmotrik“). Der Name leitet sich von dem sehr zentralisiert angelegten Eisenbahnnetz Frankreichs ab, bei dem fast alle Bahnverbindungen auf Paris zulaufen (früher noch mehr als heute).

Beispiel 3:

Sei (X, d) irgendein vorgegebener metrischer Raum, d.h. insbesondere d eine Metrik auf X . Dann kann man aus d weitere Metriken auf X konstruieren. Z.B. sind folgende Abbildungen $\mu, \nu, \eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ Metriken:

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &:= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \\ \nu(x, y) &:= \ln(1 + d(x, y)), \\ \eta(x, y) &:= \min(1, d(x, y)). \end{aligned}$$

An diesen Beispielen erkennt man recht schnell, dass der durch eine Metrik gegebene Abstandsbegriff nicht immer viel mit unserer Erfahrung vor allem mit der natürlichen Metrik zu tun hat. So führt z.B. die Definition der Metrik μ dazu, dass alle Teilmengen von X (inklusive X selbst) in (X, μ) beschränkt sind, denn $\mu(x, y) < 1$ für alle x und y ! Durch μ kann man also jeden metrischen Raum „beschränken“, völlig gleichgültig, wie er vorher mit seiner Metrik d ausgesehen hat - was anschaulich vielleicht nicht ganz leicht einzusehen ist. Der Begriff der Metrik ist also eine „waschechte“ Abstraktion des intuitiven Abstandsbegriffs und nicht bloß ein schlaue klingendes Wort für eine einfache Sache.

Mit metrischen Räumen werden wir uns (unter anderem) in Kapitel 5 beschäftigen, genauer mit deren Vollständigkeit. Aber auch an anderen Stellen werden uns metrische Räume wiederbegegnen, sei es als allgemeines Konzept oder in ganz konkreten Beispielen. Das erste Wiedersehen folgt schon bald im ersten Kapitel, in welchem wir die allgemeineren topologischen Räume einführen, die grundlegenden Begrifflichkeiten klären und erste einfache Eigenschaften topologischer Räume untersuchen werden.

Teil I.

Mengentheoretische Topologie

1. Topologische Räume

In diesem ersten Kapitel werden wir vor allem die Begriffe „offen“, „abgeschlossen“, „kompakt“, „Umgebung“, „Konvergenz“ und „Stetigkeit“ einführen. In einem speziellen Kontext sollten diese Begriffe bereits aus der Analysis bekannt sein (etwa im Rahmen der Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik“ oder „Funktionentheorie“). Wir wollen diese Konzepte hier jedoch deutlich verallgemeinern und uns insbesondere nicht etwa auf den $\mathbb{R}^n$ beschränken.

1.1. Topologie, Topologische Räume, Beispiele

Wir beginnen mit einigen elementaren Definitionen.

Definition 1.1:

Sei X eine beliebige Menge. Eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}ot(X)$ von Teilmengen von X heißt **Topologie auf X** , falls gilt:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- (ii) Jede Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{T}$ liegt wieder in $\mathcal{T}$:

$$O_i \in \mathcal{T} \text{ für alle } i \in I \implies \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T},$$

wobei I eine beliebige Indexmenge sei.

- (iii) Jeder Schnitt *endlich vieler* Mengen aus $\mathcal{T}$ liegt wieder in $\mathcal{T}$:

$$O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T} \implies \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$$

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt dann **topologischer Raum**. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen die **offenen Mengen von X** . Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen in X** , falls ihr Komplement $X \setminus A$ in $\mathcal{T}$ liegt.

Beachte:

- Die Elemente einer $\mathcal{T}$ sind selbst wieder *Mengen*, nämlich Teilmengen von X . Damit ist klar, dass es Topologien immer nur im Zusammenhang mit einer vorgegebenen Menge (eben X) gibt, sie stehen nie „alleine“ (denn von was sollte man dann Teilmengen bilden?).
- Die Vereinigung unendlich vieler offener Mengen (d.h. Mengen aus $\mathcal{T}$) ist nach (ii) wieder offen. Dies muss aber nicht für den Schnitt unendlich vieler offener Mengen gelten - wir fordern in (iii) nur die Abgeschlossenheit bezüglich *endlicher* Schnitte! Wer das spitzfindig findet, betrachte einmal den unendlichen Schnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ von offenen Intervallen in $\mathbb{R}$. Der ist nämlich $\{0\}$, und $\{0\}$ ist als Menge nicht offen. Dieser Sachverhalt in dem ganz konkreten, vertrauten Beispiel der reellen Zahlen hat diese Diskrepanz zwischen *beliebigen* Vereinigungen und *endlichen* Schnitten in der Definition einer Topologie tatsächlich auch motiviert - definieren könnte man das ja eigentlich auch anders, aber auf diese Weise erreicht man eine gute Übereinstimmung mit den Erfahrungen aus dem vertrauten $\mathbb{R}$.
- Der Begriff „offene Menge“ ist aus der Anschauung mit Vorurteilen behaftet. Im Moment bedeutet er für uns jedoch nur, dass die Menge zur Topologie gehört, mit der gerade gearbeitet wird. In anderen Topologien könnte die selbe Teilmenge schon nicht mehr offen sein. Also Vorsicht: Eine Menge „an sich“ ist nicht offen, ohne einen umfassenden topologischen Raum macht diese Bezeichnung keinen Sinn. Die ausführliche Form sollte also lauten: „ O ist offen als Teilmenge des topologischen Raumes X “.

Veranschaulichen wir uns diese doch recht abstrakte Definition nach so viel Gerede endlich durch einige Beispiele:

Beispiel 4:

Sei X eine Menge.

- (a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie, die sogenannte (indiskrete) **Klumpentopologie** von X .
- (b) $\mathcal{T} = \mathcal{P}ot(X)$ ist eine Topologie, die sogenannte **diskrete Topologie**.

Neben diesen recht langweiligen Topologien, die es auf jeder beliebigen Menge gibt, existieren natürlich auch noch wesentlich spannendere Beispiele, die die Definition 1.1 rechtfertigen. Insbesondere gibt es etwa zu jedem metrischen Raum eine direkt damit zusammenhängende Topologie:

- (c) Sei $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik. d definiert eine Topologie $\mathcal{T}_d$ auf dem metrischen Raum (X, d) durch folgende Bedingung:
Eine Menge $O \subseteq X$ ist genau dann offen (d.h. $O \in \mathcal{T}_d$), wenn für es alle Elemente $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq O$.
 $B_\varepsilon(x)$ nennen wir **offene Kugel** mit Radius ε um x . Anders formuliert gehören also alle die Mengen O zur Topologie $\mathcal{T}_d$, für die es zu jedem Element $x \in O$ eine Kugel um x gibt, die vollständig in O liegt.

Konkretisieren wir dieses Beispiel noch einmal etwas: Betrachten wir als Menge den $\mathbb{R}^n$ und als Metrik die Euklidische Metrik

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

(vergleiche Kapitel 0.3). Die von der Euklidischen Metrik induzierte Topologie auf $\mathbb{R}^n$ heißt die **natürliche Topologie** des $\mathbb{R}^n$. Die Anschauung rechtfertigt den Begriff „offen“ und sorgt insbesondere dafür, dass offene Intervalle aus $\mathbb{R}$ ihren Namen wirklich verdienen.

- (d) Sei X unendlich. Dann ist $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ endlich}\}$ eine Topologie, die sogenannte **komplement-endliche Topologie**.
Analog definiert man für überabzählbares X mit $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ abzählbar}\}$ die **komplement-abzählbare Topologie**.

Beachte:

- Dass diese Beispiele tatsächlich Topologien sind, rechnet man einfach mithilfe der Definition nach. Dies ist in diesen recht simplen Fällen wahrscheinlich mehr Schreib- als Denkarbeit.
- Wie man an den Beispielen (a) und (b) gut erkennen kann, ist „offen“ *nicht* das logische Gegenteil von „abgeschlossen“. In der Klumpentopologie von X sind die Mengen $\emptyset$ und X offen (denn sie gehören ja zur Topologie). Da $X \setminus \emptyset = X \in \mathcal{T}$ und $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{T}$ sind sie aber auch beide abgeschlossen, denn ihre Komplemente sind als Elemente von $\mathcal{T}$ ja offen! Mengen können also sowohl offen als auch abgeschlossen sein.
Ebenso kann eine Menge auch weder offen noch abgeschlossen sein: Betrachte etwa $\mathbb{R}$ mit der natürlich Topologie. Die Menge $[0, 1[$ ist nicht offen, denn für den Punkt $0 \in [0, 1[$ finden wir kein $\varepsilon > 0$, sodass die offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ in $[0, 1[$ liegt (vergleiche Beispiel 4 (c)). Sie ist aber auch nicht abgeschlossen, denn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus [0, 1[=]-\infty, 0[\cup [1, \infty[$ ist ebenfalls nicht offen, mit analogem Argument (wobei der wunde Punkt diesmal die 1 ist)!

Man kann übrigens eine Topologie statt durch ihre offenen Mengen genauso gut durch ihre abgeschlossenen Mengen charakterisieren. Dass man mit offenen Mengen „anfängt“ und die abgeschlossenen Mengen als deren Komplemente definiert, ist willkürlich gewählt, es hätte anders herum ebenfalls funktioniert.

Hier schreiben wir die notwendigen Eigenschaften nicht als Axiome auf, sondern als Folgerung aus der Definition:

Bemerkung 1.2:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \mathcal{T}\}$ die Menge aller in $\mathcal{T}$ abgeschlossenen Teilmengen von X . Dann gilt:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(ii) Jeder Schnitt von Mengen aus $\mathcal{A}$ liegt wieder in $\mathcal{A}$:

$$O_i \in \mathcal{A} \text{ für alle } i \in I \implies \bigcap_{i \in I} O_i \in \mathcal{A},$$

wobei I eine beliebige Indexmenge sei.

(iii) Jede Vereinigung *endlich vieler* Mengen aus $\mathcal{A}$ liegt wieder in $\mathcal{A}$:

$$O_1, \dots, O_n \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{A}$$

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{A}$. □

Beachte: Bei abgeschlossenen Mengen verhält es sich bei den Schnitten und Vereinigungen genau umgekehrt wie bei den offenen: *beliebige Schnitte* abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, aber nur *endliche Vereinigungen*!

Wie bei algebraischen Strukturen wollen wir nun ein Analogon zum „Erzeugendensystem“. Dann können wir Topologien durch die Angabe einiger ihrer Elemente festlegen (und untersuchen), statt wie oben *alle* Elemente angeben zu müssen. Hierzu definieren wir:

Definition 1.3:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ der Topologie heißt **Basis der Topologie** $\mathcal{T}$, falls jedes $O \in \mathcal{T}$ eine Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist:

$$O = \bigcup_{i \in I} B_i \text{ wobei } B_i \in \mathcal{B}.$$

Wir nennen $\mathcal{T}$ die **von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie** und schreiben:

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{B} \rangle$$

Beachte:

- Es ist wichtig, zwischen dem „geschwungenen“ $\mathcal{B}$ und dem „normalen“ B zu unterscheiden: Mit $\mathcal{B}$ bezeichnen wir die Basis, mit B (oder B_i) ihre Elemente.
- Im Gegensatz zum Basisbegriff der linearen Algebra für Vektorräume fordern wir in der Definition 1.2 *nicht* die Unverkürzbarkeit einer Basis. Jede Topologie ist z.B. eine Basis von sich selbst (wenn auch keine, die uns das Leben wirklich erleichtern würde). Die Basis einer Topologie entspricht also eher dem Erzeugendensystem eines Vektorraums als seiner Basis.

Um möglichst leicht nachprüfen zu können, ob wir es bei einer Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Pot}(X)$ mit einer Basis zu tun haben, können wir als Alternative zum Nachrechnen der Definition folgendes Kriterium zuhilfe nehmen:

Bemerkung 1.4:

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}ot(X)$ ist eine Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ *genau dann*, wenn

$$(a) \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$$

$$(b) \text{ Für alle } B, B' \in \mathcal{B} \text{ und alle } x \in B \cap B' \text{ existiert ein } B'' \in \mathcal{B} \text{ mit } x \in B'' \subseteq (B \cap B')$$

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “

- Sei $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$. Da $X \in \mathcal{T}$, gibt es Mengen $(B_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{B}$ mit

$$X = \bigcup_{i \in I} B_i \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B,$$

aber natürlich gilt auch $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq X$, also ist (a) erfüllt.

- Seien $B, B' \in \mathcal{B}$. Dann liegt nach Definition 1.1 ihr Schnitt $B \cap B'$ in $\mathcal{T}$. Also können wir $B \cap B'$ schreiben als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$:

$$B \cap B' = \bigcup_{i \in I} B_i \quad (B_i \in \mathcal{B})$$

Damit folgt:

$$x \in B \cap B' \implies \exists i \in I : x \in B_i \subseteq B \cap B'$$

Mit $B'' := B_i$ folgt (b).

„ $\Leftarrow$ “

Definiere $\mathcal{T}$ als die Menge aller Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{T}$ dann eine Topologie ist:

- Aus (a) folgt $X \in \mathcal{T}$, außerdem $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i \in \mathcal{T}$.²
- Dass Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{T}$ wieder in $\mathcal{T}$ liegen, folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{T}$.
- Es bleibt zu zeigen, dass Durchschnitte endlich vieler offener Mengen wieder offen sind. Hierzu seien zunächst $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}$. Wir zeigen per Induktion, dass dann

$$B_1 \cap \dots \cap B_k \in \mathcal{T}:$$

Induktionsanfang: Haben wir nur eine Menge $B_1 \in \mathcal{B}$, so liegt ihr „Durchschnitt“ natürlich in $\mathcal{T}$.

Induktionsvoraussetzung:

$$B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} = \bigcup_{i \in I} C_i \text{ für } C_i \in \mathcal{B}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} B_1 \cap \dots \cap B_k &= \bigcup_{i \in I} C_i \cap B_k \\ &= \bigcup_{i \in I} (C_i \cap B_k) \end{aligned}$$

²Wir haben hier ausgenutzt, dass wir als Indexmenge I alles wählen dürfen, auch die leere Menge - und die Vereinigung von „keinen“ Mengen ist natürlich $\emptyset$!

Nun existiert aber für jedes $x \in C_i \cap B_k$ eine Menge $B_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_x \subseteq C_i \cap B_k$. Vereinigen wir alle diese Mengen B_x , so ergibt sich

$$\bigcup_{x \in C_i \cap B_k} B_x = C_i \cap B_k,$$

also ist $C_i \cap B_k \in \mathcal{T}$ und damit auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} (C_i \cap B_k)$.

Damit ist also jeder endliche Durchschnitt von Mengen aus $\mathcal{B}$ ein Element von $\mathcal{T}$. Um zu zeigen, dass dies auch für jeden endlichen Durchschnitt von Mengen $T_1, T_2, \dots, T_m$ aus $\mathcal{T}$ gilt, nutzen wir aus, dass jedes T_i sich als Vereinigung von Mengen $B_{i,j} \in \mathcal{B}$ (mit $j \in J$ und J Indexmenge) darstellen lässt. Dadurch wird der Durchschnitt von $T_1, T_2, \dots, T_m$ zu

$$\bigcap_{i=1}^m \bigcup_{j \in J} B_{i,j}$$

Mit dem Distributivgesetz der Mengenoperationen $\cup$ und $\cap$ folgt die Behauptung³. □

Nun wird es mal wieder höchste Zeit für ein paar Beispiele.

Beispiel 5: (a) Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik, dann ist

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{N}\}$$

eine abzählbare Basis von $\mathbb{R}^n$. Beachte, dass $\mathbb{R}^n$ selbst natürlich trotzdem nicht abzählbar ist!

(b) Allgemeiner: Ist (X, d) ein metrischer Raum, dann ist die Menge aller offenen Kugeln

$$\{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0, x \in X\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}_d$.

(c) $\{\{x\} \mid x \in X\}$ ist eine Basis der diskreten Topologie auf X .

Betrachten wir einmal folgende Topologien auf der Menge $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, X\}, \\ \mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, X\}. \end{aligned}$$

In $\mathcal{T}_1$ haben wir „mehr“ offene Mengen als in $\mathcal{T}_2$. Mehr noch: In $\mathcal{T}_1$ sind alle Mengen offen, die auch in $\mathcal{T}_2$ offen sind, und noch ein paar mehr. Während $\mathcal{T}_2$ die Menge X also nur „grob“ in offene Mengen aufteilt, nimmt $\mathcal{T}_1$ sie schon deutlich „feiner“ auseinander. Wenn wir allgemein Topologien auf einer Menge vergleichen wollen, helfen uns diese Begriffe

Definition 1.5:

Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf einer Menge X . $\mathcal{T}_1$ heißt **feiner** als $\mathcal{T}_2$, falls

$$\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1.$$

$\mathcal{T}_2$ heißt dann auch **gröber** als $\mathcal{T}_1$.

Ein Beispiel haben wir eben schon gesehen. Weitere Beispiele liefert folgende Bemerkung.

³Wer findet, dass der simple Hinweis auf das Distributivgesetz geschummelt ist, kann das ja mal explizit „ausrechnen“. Viel Spaß mit den Indizes!

Bemerkung 1.6:

Sei X eine Menge.

- (a) Die *größte* Topologie auf X ist die Klumpentopologie, passend zum Namen. Die *feinste* ist die diskrete Topologie.
- (b) Die von $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}ot(X)$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}$ ist die größte Topologie auf X , in der alle Mengen aus $\mathcal{B}$ offen sind.
- (c) Zwei Topologien auf X sind nicht notwendig vergleichbar! So sind z.B. $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0\}, \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \mathbb{R} \setminus \{1\}, \mathbb{R}\}$ Topologien auf $\mathbb{R}$, aber weder gilt $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, noch die umgekehrte Beziehung. Damit ist keine der beiden Topologien feiner (bzw. größer) als die andere.

1.2. Umgebungen

Auch mit dem Begriff der „Umgebung“ dürfte der Leser aus der Analysis (insbesondere der Definition von Konvergenz) vertraut sein. Wir verallgemeinern das Konzept der Umgebung auf topologische Räume:

Definition 1.7:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.

- Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung von x** , falls es ein $O \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in O \subseteq U$.
- $\mathcal{U}(x) = \{U \subseteq X \mid U \text{ Umgebung von } x\}$ heißt **Umgebungssystem von x** .

Beachte:

- Auch hier ist die (optische) Unterscheidung des Umgebungssystems $\mathcal{U}(x)$ von der einzelnen Umgebung U wichtig.
- Der Ausdruck $U \in \mathcal{U}(x)$ bedeutet verbal nichts anderes als „ U ist eine Umgebung von x “.

Bemerkung 1.8:

Eine Teilmenge $O \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist:

$$O \text{ offen in } X \iff O \in \mathcal{U}(x) \text{ für alle } x \in O$$

Beweis:

Die Richtung „ $\Rightarrow$ “ ist klar. Für die Rückrichtung „ $\Leftarrow$ “ sei $O \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in O$. Dann gilt:

$$\forall x \in O \exists O_x \text{ offen mit } x \in O_x \subseteq O$$

Wegen $O = \bigcup_{x \in O} O_x$ ist O als Vereinigung offener Mengen ebenfalls offen. □

Diese Charakterisierung einer offenen Menge ist sehr nützlich. Man kann sie sehr oft in Beweisen benutzen, deshalb lohnt es sich, sie immer parat zu haben (und schönerweise ist sie auch nicht schwer zu merken).

Nun wollen wir uns aber mal tatsächlich um Umgebungen und Umgebungssysteme kümmern. Einige wichtige Eigenschaften halten wir in folgender Bemerkung fest:

Bemerkung 1.9:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann gilt:

- (a) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U$
- (b) $U \in \mathcal{U}(x), U \subseteq V \subseteq X \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$
- (c) $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}(x)$
- (d) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V$

Beweis:

Die Aussagen (a) bis (c) folgendes als einfache Rechenregeln unmittelbar aus der Definition.

Um (d) zu zeigen sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es nach Definition eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$. Setze $V = O \in \mathcal{U}(x)$, und nach Bemerkung 1.8 folgt daraus:

$$y \in O \subseteq U \quad \forall y \in O \implies U \in \mathcal{U}(y) \quad \forall y \in O = V.$$

□

Beachte: Die letzte Aussage (d) ist sinnvoll, da Umgebungen keine offenen Mengen sein müssen, d.h. eine Umgebung U von x muss nicht für *alle* ihre Elemente eine Umgebung sein. Z.B. ist das abgeschlossene reelle Intervall $[0, 1]$ eine Umgebung von $\frac{1}{2}$, aber keine Umgebung von 0. Aber U ist eine Umgebung für alle $y \in V := (0, 1) \subseteq U$, also alle Elemente des *offenen* Intervalls von 0 bis 1. Das ist gerade die Aussage (d).

Warum waren die Eigenschaften jetzt eigentlich so wichtig? Sie scheinen mehr oder weniger trivial zu sein, aber es war mehr als nur Spielerei, sie genau so zu formulieren: Der eigentliche Witz ist folgende „umgekehrte“ Aussage:

Satz 1.10:

Sei X eine Menge und für alle $x \in X$ sei $\emptyset \neq \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}ot(X)$ mit den Eigenschaften aus Bemerkung 1.9, also

- (a) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U$,
- (b) $U \in \mathcal{U}(x), U \subseteq V \subseteq X \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$,
- (c) $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}(x)$,
- (d) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V$.

Dann existiert **genau eine** Topologie $\mathcal{T}$ auf X , sodass $\mathcal{U}(x)$ „das“ Umgebungssystem von $x \in X$ ist.

Beweis:

Übungsaufgabe.

□

Kurz (dafür ungenau) zusammengefasst: Eine Topologie bestimmt ihre Umgebungssysteme, und Umgebungssysteme bestimmen ihre Topologie. Falls das noch nicht spektakulär genug klingt: Es ist völlig egal, ob wir die Definition einer Topologie zugrunde legen und darauf den Umgebungsbegriff aufbauen (so haben wir es getan), oder umgekehrt den Umgebungsbegriff zugrunde legen und den Topologiebegriff mittels Bemerkung 1.8 daraus basteln (so hat es Felix Hausdorff in der Geburtsstunde der mengentheoretischen Topologie getan). Beide Wege sind äquivalent, wobei der über die Umgebungen heute nicht mehr sehr üblich ist, obwohl er vielleicht ein bisschen anschaulicher sein mag.

1.3. Ausgezeichnete Mengen und Punkte

Im folgenden werden wir einige nützliche Sprechweisen einführen.

Definition 1.11:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.

- x heißt **innerer Punkt** von A , falls $A \in \mathcal{U}(x)$
- x heißt **Berührungspunkt** von A , falls für alle Umgebungen U von x gilt $U \cap A \neq \emptyset$
- x heißt **Randpunkt** von A , falls x Berührungspunkt sowohl von A als auch von $X \setminus A$ ist
- $\overset{\circ}{A}$ bezeichnet die Menge der inneren Punkte von A und heißt **Inneres** von A
- $\overline{A}$ bezeichnet die Menge der Berührungspunkte von A und heißt **Abschluss** von A
- ∂A bezeichnet die Menge der Randpunkt von A und heißt **Rand** von A

Wir notieren ein paar einfache Beziehungen dieser ausgezeichneten Mengen zueinander:

Bemerkung 1.12:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$. Dann gilt:

- (a) $\overset{\circ}{A}$ ist die größte offene Teilmenge von A .
 $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von A .
- (b) A offen $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$
 A abgeschlossen $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
- (c) $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

Beweis: (a) $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ gilt direkt nach Definition 1.11. Die andere Inklusion beweisen wir so:

- Wir zeigen: $\overset{\circ}{A}$ ist offen:

$$\begin{aligned}x \in \overset{\circ}{A} &\Rightarrow A \in \mathcal{U}(x) \\&\Rightarrow \exists B \text{ offen mit } : x \in B \subseteq A \\&\Rightarrow B \subseteq \overset{\circ}{A}\end{aligned}$$

Die letzte Inklusion zeigt man so:

$$\begin{aligned}y \in B &\Rightarrow B \in \mathcal{U}(y) \\&\Rightarrow A \in \mathcal{U}(y) \\&\Rightarrow y \in \overset{\circ}{A} \\&\Rightarrow \overset{\circ}{A} \in \mathcal{U}(x) \\&\Rightarrow \overset{\circ}{A} \text{ offen}\end{aligned}$$

- Wir zeigen: $\overset{\circ}{A}$ ist die *größte* offene Teilmenge:
Sei $C \subseteq A$ eine weitere offene Teilmenge. Dann gilt für alle Elemente $y \in C$: $C \in \mathcal{U}(y)$. Damit folgt aber für alle $y \in C$: $A \in \mathcal{U}(y)$ und schließlich $C \subseteq \overset{\circ}{A}$.

Für die Aussage mit den abgeschlossenen Mengen benutze man

$$(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$$

(b) Sei A offen, dann gilt nach Teil (a) $A = \overset{\circ}{A}$. Sei $A = \overset{\circ}{A}$, dann ist A offen, ebenfalls nach (a).

Analog für A abgeschlossen

(c) Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{A} &\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x) \text{ mit } U \cap (X \setminus A) = \emptyset \text{ (etwa } U = A) \\ &\Leftrightarrow x \text{ nicht Berührungspunkt von } X \setminus A \end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} x \in \partial A &\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x \text{ Berührungspunkt von } A \text{ und von } X \setminus A \\ &\Leftrightarrow x \text{ Berührungspunkt von } A \text{ und } x \notin \overset{\circ}{A} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. □

Beispiel 6:

Sei X eine unendliche Menge mit der komplement-endlichen Topologie (siehe Beispiel 4 (d)) und $A \subseteq X$.

- (a) Ist A endlich, so gilt: $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, $\overline{A} = A$ und $\partial A = A$ nach Bemerkung 1.12. Denn jede nichtleere offene Menge in X ist unendlich, jede endliche Menge ist abgeschlossen in X .
- (b) Ist $X \setminus A$ endlich, so gilt: $\overset{\circ}{A} = A$, $\overline{A} = X$ und $\partial A = X \setminus A$.
- (c) Sind A und $X \setminus A$ beide unendlich, so gilt: $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, $\overline{A} = X$ und $\partial A = X$.

In diesem Beispiel haben wir einige „Extremfälle“ für Abschluss oder Inneres einer Menge kennen gelernt. In folgender Definition werden wir für bestimmte Spezialfälle des Inneren einer Menge Namen einführen.

Definition 1.13:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **dicht in X** , falls $\overline{A} = X$.
- A heißt **nirgends dicht in X** , falls $\overline{A}$ keine inneren Punkte hat, d.h. wenn gilt: $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

Betrachten wir neben den oben genannten noch einige weitere einfache Beispiele zur Verdeutlichung.

Beispiel 7:

Sei jeweils $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- (a) Ist $\mathcal{T}$ die diskrete Topologie auf X , so ist nur X selbst dicht, da für alle $A \subseteq X$ gilt: $A = \overline{A}$.
- (b) Ist $\mathcal{T}$ die Klumpentopologie, so sind alle nichtleeren Teilmengen von X dicht in X , da nur $\emptyset$ und X abgeschlossen sind.
- (c) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist dicht in der natürlichen Topologie von $\mathbb{R}$.

Diese Aussage kennen wir in einer anderen Formulierung bereits aus der Analysis. Ebenfalls wird folgende Eigenschaft der ganzen Zahlen nicht überraschen:

- (d) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ist nirgends dicht in der natürlichen Topologie von $\mathbb{R}$.

Es ist wichtig, auf die Topologie zu achten, in der man sich bewegt, wenn man von Dichtigkeit spricht. Wenn wir nämlich nicht die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$ betrachten, sondern eine andere, so können sich die Verhältnisse u.U. drastisch ändern:

- (e) Betrachte $\mathbb{R}$ mit der komplement-endlichen Topologie. Es gilt $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$, da außer $\mathbb{R}$ nur endliche Mengen abgeschlossen sind. In diesem Fall ist $\mathbb{Z}$ also dicht in $\mathbb{R}$!

1.4. Stetige Abbildungen

Wann immer wir in der Algebra Strukturen auf Mengen wie Gruppen oder Vektorräume betrachten, interessieren wir uns auch für **strukturhaltende Abbildungen**. Bei Gruppen sind dies die Gruppenhomomorphismen, bei Vektorräumen die linearen Abbildungen. Für topologische Räume heißen die strukturhaltenden Abbildungen stetig:

Definition 1.14:

Seien $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ heißt **stetig**, wenn Urbilder offener Mengen wieder offen sind, d.h. wenn für alle offenen Mengen $O' \in \mathcal{T}'$ gilt:

$$f^{-1}(O') \in \mathcal{T}$$

Auch zum Begriff der Stetigkeit existieren sicherlich Vorurteile aus der Analysis. Auf den ersten Blick hat diese Definition mit der aus der Analysis wenig Gemeinsames. In topologischen Räumen haben wir ja im Allgemeinen keinen Abstandsbegriff um etwa ein Analogon zum ε - δ -Kriterium zu formulieren. Dennoch schließt der topologische Stetigkeitsbegriff den analytischen ein und kann daher als dessen Verallgemeinerung betrachtet werden.

Beispiel 8: (a) Wenn die Abbildung

$$id_X : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}'), x \mapsto x$$

stetig ist, so ist $\mathcal{T}$ feiner als $\mathcal{T}'$. Die Umkehrung gilt ebenso.

- (b) Sei $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$. Ist $\mathcal{T}$ die diskrete Topologie, so ist f stetig. Ist $\mathcal{T}'$ die Klumpentopologie, so ist f ebenfalls stetig.

In der Analysis war die Verknüpfung von stetigen Abbildungen wieder stetig. Die naheliegende Frage, ob diese schöne Eigenschaft auch bei diesem allgemeineren Stetigkeitsbegriff erhalten bleibt, ist mit einem klaren „ja!“ zu beantworten:

Bemerkung 1.15:

Seien X, Y, Z topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen. Dann ist auch die Verknüpfung $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig.

Beweis:

Das folgt direkt aus der Definition. □

Nach der großspurigen Ankündigung, stetige Abbildungen wären strukturhaltende Abbildungen, sollten wir uns ansehen, wie sich Stetigkeit mit den bisher definierten elementaren Begriffen verträgt.

Satz 1.16:

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) f ist stetig.
- (b) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{T}_Y$, sodass $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ für alle $V \in \mathcal{B}$.
- (c) Für alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq Y$ ist auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.
- (d) Für alle Mengen $M \subseteq X$ gilt $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$
- (e) Für alle $x \in X$ gilt: Für alle $V \in \mathcal{U}(f(x))$ ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$. Wir sagen auch: „ f ist stetig in x .“

Beweis:

Wir zeigen zunächst per Ringschluss die Äquivalenz von (a), (b) und (e), anschließend die Äquivalenz von (a) und (c). Die fehlende Äquivalenz von (c) und (d) sei Euch als Übungsaufgabe überlassen.

(a) $\Rightarrow$ (b): Wähle z.B. $\mathcal{B} = \mathcal{T}$.

(b) $\Rightarrow$ (e): Sei $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Dann gibt es eine offene Menge W mit $f(x) \in W \subseteq V$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}_Y$ ist, lässt sich W als Vereinigung von Mengen $W_i \in \mathcal{B}$ darstellen: $W = \bigcup_{i \in I} W_i$. Insbesondere gibt es ein i mit $f(x) \in W_i \subseteq V$. Mit (b) folgt daraus $x \in f^{-1}(W_i) \subseteq f^{-1}(V)$, wobei $f^{-1}(W_i) \in \mathcal{T}_X$ ist $\Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$.

(e) $\Rightarrow$ (a): Sei $V \subseteq U$ offen und $y \in V \cap f(X)$.

$\Rightarrow V \in \mathcal{U}(y)$, nach (e) ist also für alle $x \in f^{-1}(\{y\})$ die Menge $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x . Dann ist aber $x \in f^{-1}(V)$ ein innerer Punkt von $f^{-1}(V)$ für alle $x \in f^{-1}(V)$. Somit ist $f^{-1}(V) = (f^{-1}(V))^\circ$ offen.

(a) $\Leftrightarrow$ (c): Es gilt $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ für alle Teilmengen $A \subseteq Y$ (nicht nur für die abgeschlossenen!). Ist A aber abgeschlossen, so ist $Y \setminus A$ offen, und dank der Stetigkeit von f ist dann auch $f^{-1}(Y \setminus A)$ offen. Dann ist $X \setminus f^{-1}(A)$ offen und $f^{-1}(A)$ somit abgeschlossen.

geht man für Rückrichtung von der Abgeschlossenheit von A und $f^{-1}(A)$ aus, so folgt mit denselben Argumenten die Stetigkeit von f .

(c) $\Leftrightarrow$ (d): Übung ;-)

□

Beispiel 9:

Achtung: Bilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen sind nicht notwendigerweise offen! Betrachte etwa in $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Es gilt für die offene Menge $] - 1, 1[$ unter der Abbildung: $f(] - 1, 1[) = [0, 1[$. Aber das ist keine offene Menge!

Irgendwie ist es schade, dass stetige Abbildungen diese Eigenschaft im Allgemeinen nicht haben. Das gibt aber Anlass, diejenigen Abbildungen, die dieses schöne Merkmal haben, mit einem eigenen Namen zu würdigen:

Definition 1.17:

Seien $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ heißt **offen**, falls Bilder offener Mengen wieder offen sind. Sie heißt **abgeschlossen**, falls Bilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind.

f heißt **Homöomorphismus**, falls f bijektiv, stetig und offen ist.

X und X' heißen **homöomorph**, falls es einen Homöomorphismus $f : X \rightarrow X'$ gibt. Man schreibt $X \approx X'$.

Oft findet man in Büchern auch $X \cong X'$ als Symbol für homöomorphe Räume. Da wir das Zeichen $\cong$ für isomorphe algebraische Strukturen (insbesondere Gruppen) verwenden, bleiben wir für Homöomorphie bei $\approx$, um Verwechslungen auszuschließen. Tatsächlich werden wir in der algebraischen Topologie gleichzeitig mit topologischen und algebraischen Strukturen arbeiten (Stichwort „Fundamentalgruppe“), der „optische Unterschied“ zwischen diesen beiden Strukturgleichheiten wird uns also wirklich betreffen.

Ein Ziel der Topologie ist es, topologische Räume bis auf Homöomorphie zu klassifizieren. Dieses „Ziel“ wird aber sicherlich außer Reichweite bleiben, selbst für einzelne Teilklassen von topologischen Räumen.

In Kapitel 5 werden wir den Begriff der *Homotopie* kennenlernen. Topologische Räume bis auf Homotopie zu klassifizieren scheint leichter zu sein.

Beachte:

- Verwechselt nicht den Begriff des Homöomorphismus mit dem des Homomorphismus! Letzterer taucht bei Gruppen oder Ringen auf, aber nicht bei Topologien. Die Entsprechung des Homöomorphismus bei Gruppen wäre auch eher der Isomorphismus, da wir ja Bijektivität fordern.
- Die Definition sagt nichts über die Stetigkeit offener Abbildungen aus! Offene Abbildungen können stetig sein, müssen es aber nicht.
- Dass Homöomorphismen offen sind, bedeutet, dass die Umkehrung eines Homöomorphismus wieder stetig ist. Das muss für beliebige bijektive und stetige Abbildungen nicht gelten.

Bevor wir uns Beispiele von Homöomorphismen anschauen, wollen wir zunächst topologische Räume sinnvoll auf Teilmengen einschränken können. Wie man das machen kann, zeigt folgende Definition:

Definition 1.18:

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Die **Spurtopologie** auf M ist definiert durch

$$\mathcal{T}_M := \{U \cap M \mid U \in \mathcal{T}_X\},$$

d.h. alle Schnitte offener Mengen mit M .

Bemerkung 1.19: • $\mathcal{T}_M$ ist sinnvollerweise eine Topologie (rechnet das mal nach!). Sie ist insbesondere die größte Topologie auf M , für die die Inklusionsabbildung $M \hookrightarrow X, x \mapsto x$ stetig ist.

- Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $(X, \mathcal{T}_X)$, so ist $\mathcal{B} \cap M := \{B \cap M \mid B \in \mathcal{B}\}$ eine Basis der Spurtopologie. Die Spurtopologie verhält sich also in diesen Beziehungen so vernünftig wie möglich.

Beispiel 10: (a) $X =]-1, 1[\subseteq \mathbb{R}$ und $X' = \mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie sind homöomorph, denn

$$f : X \rightarrow X', x \mapsto \frac{1}{1 - |x|}$$

ist ein Homöomorphismus, wobei wir folgende Umkehrabbildung haben:

$$f^{-1} : X' \rightarrow X, y \mapsto \frac{1}{1 + |y|}.$$

Analog und etwas allgemeiner ist die n -dimensionale Einheitskugel

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.

(b) $\mathbb{Q}, \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Spurtopologie sind nicht homöomorph.

Beachte, dass die Spurtopologie auf $\mathbb{N}$ *diskret* ist:

$$\{n\} = \mathbb{N} \cap]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[$$

Die Spurtopologie auf $\mathbb{Q}$ ist *nicht diskret*: Z.B. bilden alle offenen Intervalle geschnitten mit $\mathbb{Q}$ eine Basis der Topologie. Jeder solche Schnitt besteht aus unendlich vielen Punkten. Insbesondere sind einelementige Mengen nicht offen in der Spurtopologie von $\mathbb{Q}$.

(c) Betrachte den Kreis

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

mit der Spurtopologie. Dann sind $X = S^1$ und $X' = \mathbb{R}$ nicht homöomorph.

Beweis: Sei $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir zeigen: f ist nicht bijektiv und daher kein Homöomorphismus.

Betrachte die Hilfsabbildung $g : [0, 2\pi] \rightarrow S^1, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$. Für $x = (1, 0)$, $y = (-1, 0)$ ist $g(0) = g(2\pi) = y$. Es gibt nun zwei mögliche Fälle:

- a) $f(x) = f(y)$. Dann ist f nicht injektiv und wir sind schon fertig.
- b) $f(x) \neq f(y)$. O.B.d.A. nehmen wir $f(x) < f(y)$ an. Dann ist die Abbildung

$$f \circ g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig, da f stetig ist und es gilt

$$\begin{aligned} (f \circ g)(0) &= f(x) < f(y) = (f \circ g)(\pi) \\ (f \circ g)(\pi) &= f(y) > f(x) = (f \circ g)(2\pi) \end{aligned}$$

Sei $\alpha \in]f(x), f(y)[$, dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $t_1 \in]0, \pi[$ mit $(f \circ g)(t_1) = \alpha$ und ein $t_2 \in]\pi, 2\pi[$ mit $(f \circ g)(t_2) = \alpha$.

Aber $g(t_1) \neq g(t_2)$, und damit ist f nicht injektiv. □

Wir werden später (Kapitel 3) sehen, dass S^1 kompakt ist und $\mathbb{R}$ nicht - was uns viel bequemer zeigt, dass S^1 und $\mathbb{R}$ nicht homöomorph sein können, denn die Kompaktheit eines Raumes ändert sich nicht unter Homöomorphismen, sie ist eine *topologische Invariante*. Solche Invarianten zu betrachten ist oft vielversprechender als mit der Definition zu arbeiten, daher werden wir der Suche nach ihnen in dieser Vorlesung ab jetzt viel Aufmerksamkeit schenken.

2. Zusammenhang, Wegzusammenhang, Irreduzibilität und Trennungsaxiome

2.1. Zusammenhängende Räume

Im letzten Kapitel haben wir den wichtigen Begriff der Homöomorphie eingeführt. Zwei homöomorphe topologische Räume sind unter topologischen Gesichtspunkten nicht mehr unterscheidbar. Wir sagen also, dass Homöomorphismen topologische Eigenschaften erhalten. Aber welche Eigenschaften, die topologische Räume haben können, sind es denn eigentlich wert, zu heißen?

Wir ziehen die Sache von der anderen Seite her auf: Eine Eigenschaft topologischer Räume heißt **topologisch**, falls sie invariant unter Homöomorphismen ist. Anders formuliert: Eine Eigenschaft P heißt topologisch, wenn für alle topologischen Räume X, Y mit $X \approx Y$ gilt: Hat X die Eigenschaft P , so auch Y .

Eigenschaften, die nicht topologisch im Sinne dieser Definition sind, haben mit der topologischen Struktur der betrachteten Räume nichts zu tun, sie entspringen anderen „nicht-topologischen“ Betrachtungen.

Durch topologische Eigenschaften haben wir nun ein Werkzeug, um topologische Räume, die *nicht* homöomorph sind, zu unterscheiden - denn Räume, die nicht dieselben topologischen Eigenschaften haben, können nicht homöomorph sein. Je mehr topologische Eigenschaften wir also kennen, desto besser.

Bislang haben wir die topologischen Eigenschaften „diskret“ und „indiskret“ kennengelernt. Eine weitere topologische Eigenschaft, die wir in diesem Abschnitt studieren werden, ist „zusammenhängend“.

Definition 2.1:

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **zusammenhängend**, falls X *nicht* die Vereinigung zweier disjunkter nicht-leerer offener Teilmengen ist, d.h. für offene, nichtleere Mengen $A, B \subseteq X$ gilt

$$X = A \cup B \implies A \cap B \neq \emptyset.$$

Auch wenn diese Definition vielleicht auf den ersten Blick etwas verwirrend wirkt wegen der vielen „nicht...“, ist sie sehr anschaulich, wenn man an vertraute Beispiele wie den $\mathbb{R}^n$ denkt.

Beispiel 11: (a) $\emptyset$ und $\{x\}$ sind als topologische Räume zusammenhängend.

(b) $(\{a, b\}, \mathcal{T})$ zusammenhängend $\iff \mathcal{T}$ nicht diskret

(c) X indiskret $\implies X$ zusammenhängend

(d) X unendlich mit Komplement-endlich-Topologie ist zusammenhängend. Denn für eine beliebige offene Teilmenge O von X mit $\emptyset \neq O \subsetneq X$ ist $X \setminus O$ nicht offen.

(e) Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.

Das erscheint plausibel und ist von der Anschauung her leicht einzusehen. Zur Übung solltet Ihr das aber einmal formal korrekt nachweisen.

Wenn wir den Zusammenhang als topologische Eigenschaft betrachten wollen, sollten wir untersuchen, wie sich zusammenhängende Räume unter stetigen Abbildungen verhalten. Wie der nächste Satz zeigt, tun sie dies sehr vernünftig.

Satz 2.2:

Seien X, Y topologische Räume, X zusammenhängend und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis:

Angenommen, $f(X)$ ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es nichtleere offene Mengen $O_1, O_2 \subseteq Y$ mit

$$f(X) = O_1 \cup O_2.$$

Da f stetig ist, gilt dann

$$X = f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$$

mit nichtleeren offenen Mengen $f^{-1}(O_1), f^{-1}(O_2) \subseteq X$, also wäre X nicht zusammenhängend. Widerspruch! $\square$

Damit haben wir gezeigt, dass Zusammenhang eine topologische Eigenschaft ist, schließlich sind Homöomorphismen insbesondere ja stetige Abbildungen. Wie eingangs erwähnt, können wir also diesen Zusammenhang benutzen, um zu zeigen, dass topologische Räume nicht homöomorph sind. Ein einfaches Beispiel hierzu ist das folgende:

Beispiel 12:

Die Intervalle $[a, b[,]c, d[\subseteq \mathbb{R}$ sind nicht homöomorph, denn:

Sei $f : [a, b[\rightarrow]c, d[$ ein Homöomorphismus. Da $]a, b[$ zusammenhängend ist folgt mit Satz 2.2:

$$\begin{aligned} f([a, b]) &= f([a, b[\cup \{a\}) \\ &=]c, d[\cup f(\{a\}) \end{aligned}$$

ist zusammenhängend. Aber $]c, d[\cup f(\{a\})$ ist kein Intervall mehr und damit nicht zusammenhängend (nach Beispiel 11 (e)). Widerspruch!

Wenn wir ein wenig mit dem Begriff des Zusammenhangs herumspielen, könnten wir uns fragen, was passiert, wenn wir alle Teilmengen $A \subseteq X$ zusammenfassen, die ein gewisses Element $x \in X$ enthalten. Erhalten wir z.B. wieder eine zusammenhängende Menge? Erhalten wir weitere interessante Eigenschaften? Geben wir dem Kind zunächst einmal einen Namen.

Definition 2.3:

Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann heißt

$$C(x) := \bigcup \{A \mid x \in A \subseteq X \text{ zusammenhängend}\}$$

die **Zusammenhangskomponente** von x .

Notieren wir nun einige Eigenschaften der Zusammenhangskomponente:

Bemerkung 2.4:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- (a) Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend und $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, so ist auch B zusammenhängend.
- (b) Ist $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ mit zusammenhängenden $A_i \subseteq X$ für alle $i \in I$, sowie $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, so ist A zusammenhängend.
- (c) Für alle $x \in X$ ist $C(x)$ abgeschlossen und zusammenhängend.
- (d) $\{C(x) \mid x \in X\}$ ist eine Partition (d.h. eine disjunkte Zerlegung) von X .

Beweis: (a) Sei $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Angenommen, B wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ mit

$$\begin{aligned} U \cap B \neq \emptyset, \quad V \cap B \neq \emptyset, \\ U \cap V \cap B &= \emptyset, \\ B &\subseteq U \cup V. \end{aligned}$$

Dies ist die Aussage von Definition 2.1 in Verbindung mit der Spurtopologie auf B .

Dann sind $U \cap \bar{A}$ und $V \cap \bar{A}$ nichtleere offene Teilmengen von $\bar{A}$, also gilt

$$U \cap A \neq \emptyset, \quad V \cap A \neq \emptyset.$$

Da $A \subseteq B$, erhalten wir

$$\begin{aligned} U \cap V \cap A &= \emptyset, \\ A &\subseteq U \cup V. \end{aligned}$$

Aber damit wäre A nicht mehr zusammenhängend. Widerspruch!

- (b) Sei $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Angenommen, A wäre nicht zusammenhängend, d.h. es gäbe offene Mengen $B_1, B_2 \neq \emptyset$ mit $A = B_1 \dot{\cup} B_2$, wobei wir o.B.d.A. $x \in B_1$ annehmen. Da beide Mengen B_1, B_2 nicht leer sind, existiert ein $i \in I$ mit

$$B_2 \cap A \neq \emptyset \implies A_i = (A_i \cap B_1) \dot{\cup} (A_i \cap B_2)$$

Da aber einerseits $B_2 \cap A \neq \emptyset$ gilt, andererseits auch $x \in A_i \cap B_1$, ist keine dieser beiden Schnitte leer, d.h. A_i ist unzusammenhängend.

- (c) $C(x)$ ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen A mit $x \in A$, und da der Schnitt dieser Mengen nicht leer ist (er enthält ja auf jeden Fall x), ist $C(x)$ zusammenhängend nach (b).

Nach (a) ist $\overline{C(x)}$ dann ebenfalls zusammenhängend. Da aber $x \in \overline{C(x)}$ ist, folgt $C(x) = \overline{C(x)}$, also ist $C(x)$ abgeschlossen.

- (d) Natürlich gilt $X = \bigcup_{x \in X} C(x)$.

Ist $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ für zwei Elemente $x, y \in X$, so gilt nach (b): $C(x) \cup C(y)$ ist zusammenhängend und enthält sowohl x als auch y . Daraus folgt $C(x) = C(x) \cup C(y) = C(y)$. $\square$

Insbesondere ist die Zahl der Zusammenhangskomponenten eine topologische Invariante und damit ein weiteres Unterscheidungsmerkmal nicht-homöomorpher Räume.

Ein Spezialfall einer solchen Partition verdient einen besonderen Namen:

Definition 2.5:

Ein topologischer Raum X heißt **total unzusammenhängend**, falls für alle $x \in X$ gilt

$$C(x) = \{x\}$$

Topologische Räume mit dieser Eigenschaft sind tatsächlich so unzusammenhängend, wie es nur geht: Es gibt keine einzige zusammenhängende Teilmenge, die mehr als ein Element enthält.

Z.B. sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ mit ihren natürlichen Spurtopologien total unzusammenhängend (zeige dies zur Übung).

2.2. Wegzusammenhang

Zu sagen, ein Raum sei zusammenhängend im Sinne unserer Definition ist keineswegs die einzige Möglichkeit, die intuitive Idee einzufangen, dass ein Raum aus „einem einzigen Stück“ besteht. Ein anderer, ebenso natürlicher Zugang ist es, zu sagen, dass man sich durchgehend in dem Raum von einem Punkt zum anderen bewegen kann. Dies ist der Kerngedanke des Begriffes „Wegzusammenhang“.

Definition 2.6:

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **wegzusammenhängend**, falls für alle $x, y \in X$ eine stetige Abbildung

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$$

existiert mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Wir nennen γ einen **Weg** von x nach y .

Die Namensgebung dieser Eigenschaft legt die Frage nahe, ob Wegzusammenhang ein Spezialfall von Zusammenhang ist. Dies ist tatsächlich so:

Satz 2.7:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Es gilt: X wegzusammenhängend $\implies X$ zusammenhängend.

Beweis:

Wir bemerken zunächst, dass mit Satz 2.2 folgt: Ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg, so ist $\gamma([0, 1])$ zusammenhängend.

Wähle ein $x \in X$. Für alle $y \in X$ gibt es einen Weg γ_y von x nach y . Daraus folgt mit Bemerkung 2.4 (b), dass

$$X = \bigcup_{y \in X} \gamma_y([0, 1])$$

zusammenhängend ist. □

Beispiel 13: (a) Ein abgeschlossenes Intervall $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ ist wegzusammenhängend, denn

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto (1-t)a + tb$$

ist ein Weg von a nach b für alle $a, b \in [c, d]$.

(b) Die Umkehrung des Satzes 2.7 gilt *nicht*!

Betrachte etwa

$$X = \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \mid y = 1 - nx, 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

X ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend, denn es gibt keinen Weg nach $(0, 0)$.

Auf der Suche nach weiteren topologischen Invarianten hilft uns folgende Definition weiter:

Definition 2.8:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\overset{W}{\sim}$ auf X durch

$$x \overset{W}{\sim} y \iff \exists \text{ Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } X.$$

Die Äquivalenzklassen heißen **Wegzusammenhangskomponenten** von x . Wir bezeichnen mit $b_0(X)$ die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten. $b_0(X)$ nennt man auch die „0-te Betti-Zahl“ von X (nach dem italienischen Mathematiker Enrico Betti).

Bemerkung 2.9:

$b_0(X)$ ist eine topologische Invariante von X .

Beweis:

Übung ;-)

□

Betrachten wir wie immer ein paar Beispiele, um die Nützlichkeit dieser Definition aufzuzeigen. Zuvor jedoch schieben wir noch eine Bemerkung ein, die oft hilfreich sein kann, wenn es darum geht, nicht-homöomorphe Räume zu unterscheiden.

Bemerkung 2.10:

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus und $x_0 \in X$. Dann gilt:

$$X \setminus \{x_0\} \approx Y \setminus \{f(x_0)\}$$

(natürlich jeweils mit der Teilraumtopologie).

Beweis:

Die Abbildung

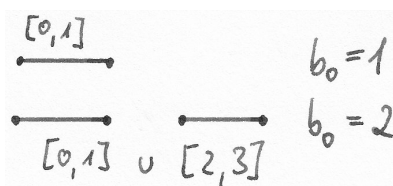
$$g : X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y \setminus \{f(x_0)\} \quad , \quad x \mapsto f(x)$$

ist ein Homöomorphismus zwischen $X \setminus \{x_0\}$ und $Y \setminus \{f(x_0)\}$. □

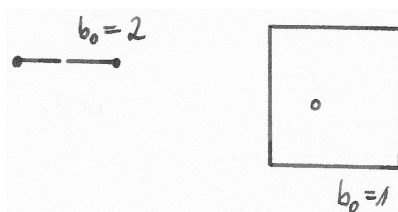
Was haben wir dadurch gewonnen? Tatsächlich eine ganze Menge: Wenn wir zwei Räume auf den ersten Blick nicht unterscheiden können (obwohl wir vermuten, dass sie nicht homöomorph sind), können wir jeweils einen Punkt entfernen (per Induktion auch endlich viele Punkte) und die neuen Räume untersuchen. In folgendem Beispiel erleben wir diesen eleganten Weg in Aktion:

Beispiel 14: (a) $[0, 1]$ ist nicht homöomorph zu $[0, 1] \cup [2, 3]$:

$[0, 1]$ ist wegzusammenhängend, hat also nur eine Wegzusammenhangskomponente, d.h. $b_0([0, 1]) = 1$.
 $[0, 1] \cup [2, 3]$ hat die Wegzusammenhangskomponenten $[0, 1]$ und $[2, 3]$, also ist $b_0([0, 1] \cup [2, 3]) = 2$.
 Damit können $[0, 1]$ und $[0, 1] \cup [2, 3]$ nicht homöomorph sein, denn die 0-te Betti-Zahl ist eine topologische Invariante.

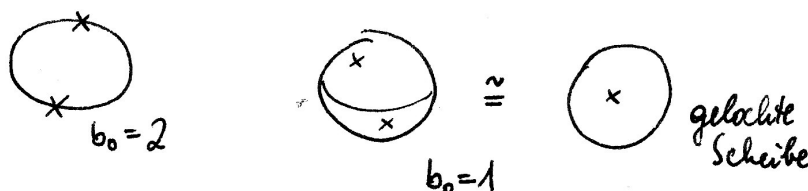


(b) $[0, 1]$ ist nicht homöomorph zu $[0, 1] \times [0, 1]$, denn entfernt man jeweils geschickt einen Punkt, so ergeben sich unterschiedliche 0-te Betti-Zahlen:



Gemäß Bemerkung 2.10 sind dann $[0, 1]$ und $[0, 1] \times [0, 1]$ nicht homöomorph.

(c) S^1 ist nicht homöomorph zu S^2 (S^1 ist die Einheitskreislinie, S^2 die Einheitskugeloberfläche). Wir gehen ähnlich wie in (b) vor und entfernen jeweils zwei Punkte:



2.3. Irreduzibilität

Beginnen wir mit einer kurzen und recht leicht eingänglichen Definition.

Definition 2.11:

$(X, \mathcal{T})$ heißt **irreduzibel**, falls X *nicht* Vereinigung zweier abgeschlossener echter Teilmengen ist.

Diese Definition ähnelt sehr der Definition von „zusammenhängend“. Es gibt aber wichtige Unterschiede:

- Die vereinigten Mengen sind diesmal abgeschlossen statt offen.
- Wir verlangen in dieser Definition *nicht*, dass die Mengen disjunkt sind.

Beispiel 15: (a) Ist X unendlich mit der Komplement-endlich-Topologie, so ist X irreduzibel. Denn ist eine echte Teilmenge $A \subsetneq X$ abgeschlossen, so ist A endlich, und die Vereinigung zweier endlicher Mengen kann nie unendlich sein.

(b) Analog erhält man die Irreduzibilität von überabzählbaren X mit komplement-abzählbar-Topologie.

(c) Alle Intervalle in $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie sind *nicht* irreduzibel. Wie sprechen dann sinnvollerweise auch von **reduzibel**.

Bemerkung 2.12:

Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:

- (a) X irreduzibel $\implies X$ zusammenhängend
- (b) X irreduzibel $\iff$ jede nichtleere offene Teilmenge von X ist dicht in X
- (c) X irreduzibel, $f : X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv $\implies Y$ irreduzibel

Beweis: (a) Das ist klar nach Definition.

(b) „ $\implies$ “ Sei $\emptyset \neq A \subseteq X$ offen und nicht dicht. Dann ist $X = \underbrace{\overline{A}}_{\text{abgeschlossen}} \cup \underbrace{X \setminus A}_{\text{abgeschlossen}}$ reduzibel.

„ $\impliedby$ “ Sei X reduzibel, d.h. $X = A_1 \cup A_2$ mit nichtleeren, abgeschlossenen echten Teilmengen $A_1, A_2 \subsetneq X$. Dann ist die Menge $O_1 := X \setminus A_1$ offen und $\neq \emptyset$ mit $O_1 \subseteq A_2$. Daraus folgt aber $\overline{O_1} \subseteq A_2 \subsetneq X$, d.h. O_1 ist nicht dicht in X .

(c) Sei $Y = f(X)$ reduzibel. Dann gibt es also abgeschlossene Teilmengen $\emptyset \neq A_1, A_2 \subsetneq Y$ mit $Y = A_1 \cup A_2$. Da f stetig ist, folgt daraus $X = \underbrace{f^{-1}(A_1)}_{\text{abg., } \neq X} \cup \underbrace{f^{-1}(A_2)}_{\text{abg., } \neq X} \implies X$ reduzibel.

□

Im folgenden betrachten wir ausführlich ein wichtiges Beispiel eines topologischen Raumes.

Beispiel 16:

Sei K ein Körper und $X = K^n$. Für $P \subseteq K[T_1, \dots, T_n]$ heißt

$$V(P) := \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \forall f \in P\} \subseteq X$$

die **Verschwindungsmenge** von P . Solche Teilmengen nennt man auch **algebraisch**.

Definiere $\mathcal{T} := \{X \setminus V(P) \mid P \subseteq K[T_1, \dots, T_n]\}$.

Behauptung: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie.

Beweis: Wir benutzen die Charakterisierung von Topologien durch ihre *abgeschlossenen* Mengen. Seien also $A_1 = V(P_1)$, $A_2 = V(P_2)$ abgeschlossen.

- Wir zeigen: $A_1 \cup A_2 = V(P_1 P_2)$, womit $A_1 \cup A_2$ wieder abgeschlossen ist. Dabei ist $P_1 P_2 = \{f \cdot g \mid f \in P_1, g \in P_2\}$.
- „ $\subseteq$ “ Sei $x \in A_1 \cup A_2$, wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass $x \in A_1$. Dann gilt $f(x) = 0$ für alle $f \in P_1$ und somit $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 0$ für alle $f \in P_1, g \in P_2$, also ist $x \in V(P_1 P_2)$.
- „ $\supseteq$ “ Sei $x \in V(P_1 P_2)$, und wir nehmen o.B.d.A. $x \notin A_1$ an. Dann gibt es $f \in P_1$ mit $f(x) \neq 0$, aber $(f \cdot g)(x) = 0$ für alle $g \in P_2 \Rightarrow g(x) = 0$ für alle $g \in P_2$. Also ist $x \in A_2$.
- Sind weiter $A_i = V(P_i)$, $i \in I$ abgeschlossene Mengen, so ist

$$\bigcap_{i \in I} A_i = V\left(\bigcup_{i \in I} P_i\right)$$

ebenfalls abgeschlossen.

- Schließlich gilt $X = V(\{0\})$ und $\emptyset = V(\{1\})$. □

Beachte: Ist $X = K$, so erhalten wir die Komplement-endlich-Topologie.

2.4. Trennungsaxiome

Die folgende Definition führt eine ganze Reihe an Begriffen ein, die alle unter dem Überbegriff „Trennung“ stehen. Gemeint ist, dass wir klassifizieren, ob und ggf. wie sich Punkte oder (abgeschlossene) Teilmengen in einem topologischen Raum voneinander trennen lassen.

Definition 2.13:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. X heißt

T0-Raum falls für alle $x, y \in X$, $x \neq y$ gilt: $\exists U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U, y \notin U$ oder $x \notin U, y \in U$.

T1-Raum falls für alle $x, y \in X$, $x \neq y$ gilt: $\exists U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U, y \notin U$.

T2-Raum falls für alle $x, y \in X$, $x \neq y$ gilt: $\exists U, V \in \mathcal{T}$ mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

T3-Raum falls für alle $x \in X$ und alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq X$ mit $x \notin A$ gilt: $\exists U, V \in \mathcal{T}$ mit $x \in U, A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

T4-Raum falls für alle abgeschlossenen $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt: $\exists U, V \in \mathcal{T}$ mit $A \subseteq U, B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Topologische Räume mit der Eigenschaft (T2) nennt man auch **Hausdorff'sche Räume**. Räume mit den Eigenschaften (T3) und (T0) heißen auch **regulär**, Räume mit (T4) und (T1) heißen **normal**.

Für uns wird insbesondere die Eigenschaft (T2) - die Hausdorff-Räume - interessant sein. Geben wir aber im folgenden erst einmal eine Charakterisierung der Eigenschaft (T1) an:

Lemma 2.14:

X ist ein T1-Raum $\iff \{x\} = \overline{\{x\}}$ für alle $x \in X$ (d.h. alle Punkte sind abgeschlossen).

Beweis:

Der Beweis verläuft recht natürlich und ist dementsprechend auch nicht sehr lang:

„ $\Rightarrow$ “ Sei $x \in X$ beliebig. Da X ein T1-Raum ist, gibt es für alle $y \in X \setminus \{x\}$ ein V_y offen mit $y \in V_y, x \notin V_y$.
Dann ist $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V_y$ und damit offen.

„ $\Leftarrow$ “ Für $x \neq y$ in X setze $U = \underbrace{X \setminus \{y\}}_{\text{offen}}$ und $V = \underbrace{X \setminus \{x\}}_{\text{offen}}$. □

Die hierarchische Anordnung der Trennungsaxiome und auch ihr „Inhalt“ lassen vermuten, dass hier eine Kette von immer stärker werdenden Spezialfällen vorliegt. Dies ist tatsächlich so, allerdings mit leichten Einschränkungen:

Korollar 2.15:

$X \text{ normal} \implies X \text{ regulär} \implies X \text{ Hausdorff'sch (T2)} \implies X \text{ ist T1} \implies X \text{ ist T0}$

Beweis: • $T2 \implies T1 \implies T0$ ist klar.

- Sei X normal, d.h. $T4$ und $T1$. Dann ist $\{x\}$ nach Lemma 2.14 abgeschlossen für alle $x \in X$. Dann (und wirklich nur dann!) ist $T3$ ein Spezialfall von $T4$, also ist X regulär.
- Sei X regulär, d.h. $T3$ und $T0$ gelten. Seien weiter $x \neq y \in X$, dann gibt es (nach $T0$) $W \subseteq X$ offen mit $x \in W$, $y \notin W$ (o.E.). Damit ist $A := X \setminus W$ abgeschlossen mit $x \notin A$, $y \in A$. Mit $T3$ folgt: $\exists U, V \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$, $y \in A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$. Zusammengenommen ist X dann also ein Hausdorff-Raum. □

Beachte: Die Folgerungskette im Korollar geht *nicht* von $T4$ und $T3$ aus, sondern von normal (d.h. $T4$ *und* $T1$) bzw. regulär (d.h. $T3$ *und* $T0$)! Lässt man die „schwachen“ Axiome $T1$ bzw. $T0$ weg, so ist die Aussage falsch!

Beispiel 17: (a) Zunächst sollten wir uns anschauen, dass $T1$ *nicht* gleichwertig zu $T0$ ist, obwohl dies auf den ersten Blick so wirken könnte. Betrachte $X = \{0, 1\}$ mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$. X ist ein $T0$ -Raum, aber *kein* $T1$ -Raum, denn für 1 finden wir keine offene Menge, die 1 enthält, aber nicht die 0! Im $T1$ -Raum müssen also *beide* Punkte Elemente einer offenen Menge sein, die den anderen Punkt nicht enthält, während es für $T0$ ausreicht, wenn einer der beiden das erfüllt.

- (b) Zudem sollten wir uns klarmachen, dass $T1$ nicht dasselbe aussagt wie $T2$. Hierzu betrachte einen unendlichen Körper K ausgestattet mit der komplement-endlich-Topologie. Wir können zwar zu jedem Paar von Punkten eine offene Menge wählen, die den einen enthält und den anderen nicht. Aber es gibt keine elementfremden (nichtleeren) offenen Mengen, also kann $X = K$ kein Hausdorff-Raum sein.

Nun kommen wir zu *dem* zentralen Begriff der Analysis, den wir auf topologische Räume verallgemeinern wollen. Die Rede ist natürlich vom Grenzwert-Begriff!

Definition 2.16:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X (wir schreiben auch $X^{\mathbb{N}}$ für die Menge aller Folgen in X). Ein $x \in X$ heißt **Grenzwert** von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls für alle Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n \in U \forall n \geq n_0$. Wir schreiben: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

ACHTUNG

Grenzwerte sind **nicht notwendigerweise eindeutig**! In der Klumpentopologie etwa konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt.

Dies läuft unseren Erfahrungen aus der Analysis zuwider und ist wahrlich keine erfreuliche Aussage. Zum Glück können wir die Katastrophe mit folgendem Lemma zumindest ein wenig abschwächen:

Lemma 2.17:

Ist X ein Hausdorff-Raum, so besitzt jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ höchstens einen Grenzwert.

Beweis:

Angenommen, in einem Hausdorff-Raum würde eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen zwei Grenzwerte $a \neq b$ konvergieren. Da X Hausdorff'sch ist, gibt es $U, V \subseteq X$ offen mit $a \in U$, $b \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Aber dann gäbe es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$, $x_n \in V$ für alle $n \geq n_0$. Widerspruch! □

Wir haben in Kapitel 1 schon sehr früh den Zusammenhang zwischen metrischen Räumen und topologischen Räumen erkannt: Jede Metrik induziert eine Topologie. Man könnte sich fragen, ob umgekehrt auch jede Topologie eine Metrik induziert. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall. Das klingt zunächst enttäuschend, zur Ehrenrettung dieser Negativaussage könnte man jedoch anführen, dass dann zumindest unsere Mühe, metrische Räume auf topologische zu verallgemeinern und uns mit deren abstrakteren Begriffen herumzuschlagen, nicht überflüssig war - dadurch haben wir tatsächlich etwas neues gelernt und nicht alten Wein in neue (und dazu noch unhandlichere) Schläuche gefüllt. Diejenigen topologischen Räume, die tatsächlich mit einer Metrik verbunden sind, sind uns aber trotzdem wichtig genug, um einen eigenen Namen zu bekommen:

Definition 2.18:

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **metrisierbar**, falls eine Metrik d auf X existiert, sodass

$$\{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}$ ist.

In der Sprache einer Übungsaufgabe würde man sagen: Wenn es eine Metrik d gibt mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Beispiele für metrisierbare topologische Räume haben wir schon in den Beispielen 1 (c) und 2 (a) kennengelernt.

Achtung: Nicht *metrisierbare* Räume mit *metrischen* verwechseln! Ein *metrischer* Raum (X, d) besteht aus einer Menge X zusammen mit einer ganz bestimmten Metrik d . Sie führt zu einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_d)$, ist selbst aber kein topologischer Raum - im Gegensatz zum *metrisierbaren* Raum $(X, \mathcal{T})$! Dessen Topologie kann durch eine Metrik (i.A. sogar mehr als eine) induziert werden, aber wir legen dafür keine Metrik fest.

Eine wichtige Aussage über metrisierbare Räume ist folgende:

Satz 2.19:

X metrisierbar $\implies X$ normal.

Beweis:

Wir müssen zeigen, dass metrisierbare Räume T1 und T4 sind. Statt T1 direkt zu zeigen, beweisen wir die stärkere T2-Eigenschaft (d.h. metrisierbare Räume sind Hausdorff'sch), daraus folgt T1 mit Korollar 2.14. Danach kümmern wir uns um die etwas aufwändigere T4-Eigenschaft.

- $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ ist eine Basis von $\mathcal{T}$.
Seien $x \neq y \in X$. Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}d(x, y) > 0$. Dann gilt:
 $x \in B_\varepsilon(x) =: U$, $y \in B_\varepsilon(y) =: V$, und $U \cap V = \emptyset$ wegen der Dreiecksungleichung. Damit ist X Hausdorff'sch (T2) und damit auch ein T1-Raum.
- Seien nun $A, B \subseteq X$ abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$.
Betrachte die offene Menge $X \setminus B$: für alle $x \in A \exists \varepsilon_x > 0$ mit $B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq X \setminus B$. Dann ist $A \subseteq \bigcup_{x \in A} B_{\frac{1}{2}\varepsilon_x}(x) =: U$, und U ist offen.
Analog erhält man $B \subseteq \bigcup_{y \in B} B_{\frac{1}{2}\varepsilon_y}(y) =: V \subseteq X \setminus A$.

Behauptung: $U \cap V = \emptyset$.

Nehmen wir das Gegenteil an: Sei $z \in U \cap V$, dann gibt es $x \in A$, $y \in B$ mit

$$\begin{aligned} d(x, z) &< \frac{1}{2}\varepsilon_x \quad \text{und} \quad d(y, z) < \frac{1}{2}\varepsilon_y \\ \Rightarrow d(x, y) &< \frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y < \max\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\} \\ \Rightarrow \underbrace{x \in B_{\frac{1}{2}\varepsilon_y}(y)}_{\Rightarrow x \notin A} \quad \text{oder} \quad \underbrace{y \in B_{\frac{1}{2}\varepsilon_x}(x)}_{\Rightarrow y \notin B} \end{aligned}$$

Widerspruch!

□

Ohne das an dieser Stelle zu beweisen, gibt es Gratis dazu folgende „umgekehrte“ Aussage:

Satz 2.20:

X normal mit **abzählbarer Basis** $\implies X$ metrisierbar.

Das ist nicht ganz die logische Umkehrung von Satz 2.18, da wir die Abzählbarkeit der Basis zusätzlich fordern müssen.

3. Kompaktheit

Von den vielen Eigenschaften, die ein topologischer Raum haben kann ist „Kompaktheit“ eine der bedeutendsten, insbesondere wenn wir mit stetigen Abbildungen auf dem Raum arbeiten.

3.1. Kompakte Räume

Starten wir mit der zentralen Definition dieses Kapitels:

Definition 3.1:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ mit $U_i \subseteq X$ offen für alle i und $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ heißt **offene Überdeckung** von X .

X heißt **quasi-kompakt**, falls jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h.

$$\exists J \subseteq I \text{ endlich mit } X = \bigcup_{i \in J} U_i.$$

X heißt **kompakt**, falls X Hausdorff'sch und quasi-kompakt ist.

Beachte:

- Quasi-Kompaktheit bedeutet nicht, dass X eine endliche offene Überdeckung besitzt! Dann wäre jeder topologische Raum quasi-kompakt, schließlich wird X z.B. von der endlichen (weil einelementigen) Familie $\{X\}$ überdeckt. Die Aussage der Definition 3.1 ist vielmehr, dass aus *jeder* offenen Überdeckung eine endliche Teilmenge ausgewählt werden kann, die X schon alleine überdeckt.
- Die Wichtigkeit dieser Eigenschaft besteht darin, dass wir in kompakten Räumen Betrachtungen über unendlich viele Mengen auf endlich viele herunterbrechen können, wodurch die Sache natürlich viel unkomplizierter wird.

Beispiel 18: (a) Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (mit natürlicher Topologie) ist genau dann kompakt, wenn X beschränkt (bzgl. der euklidischen Metrik) und abgeschlossen ist. Das ist der Satz von Heine-Borel.

(b) Wenn wir in (a) eine andere Metrik betrachten, muss diese Äquivalenz nicht mehr gelten. Ein Beispiel ist die „SNCF-Metrik“. Hier ist kompakt $\iff$ beschränkt & abgeschlossen *falsch*!

(c) Sei X ein diskreter topologischer Raum. Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ gilt: A kompakt $\iff A$ endlich.

Aus dem Satz von Heine-Borel (a) folgt, dass das abgeschlossene Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ (mit euklidischer Metrik) kompakt ist. Wir werden im folgenden der Frage nachgehen, ob das auch für $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ zutrifft.

Lemma 3.2:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(a) X quasi-kompakt, $A \subseteq X$ abgeschlossen $\implies A$ quasi-kompakt.

(b) X Hausdorff'sch, $A \subseteq X$ kompakt $\implies A$ abgeschlossen.

(c) X kompakt, $A \subseteq X$. Dann gilt: A kompakt $\iff A$ abgeschlossen.

(d) X kompakt $\implies X$ normal.

Beweis: (a) Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A , d.h. $U_i = W_i \cap A$ (Spurtopologie) mit $W_i \subseteq X$ offen.

Dann ist

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} W_i$$

Definiere $V := X \setminus A$. Da A abgeschlossen ist, ist V offen und

$$\{W_i\}_{i \in I} \cup \{V\}$$

ist eine offene Überdeckung von X . Da X quasi-kompakt ist, können wir also ein endliches $J \subseteq I$ auswählen, sodass

$$\{W_i\}_{i \in J} \cup \{V\}$$

eine endliche Teilüberdeckung von X ist. Dann ist

$$\begin{aligned} A &\subseteq \bigcup_{i \in J} W_i \\ \Rightarrow A &= \bigcup_{i \in J} W_i \cap A = \bigcup_{i \in J} U_i, \end{aligned}$$

also bildet $\{U_i\}_{i \in J}$ eine endliche Teilüberdeckung von A .

(b) Wir zeigen: $A \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow X \setminus A$ offen.

Sei $x \in X \setminus A$. Da X Hausdorff'sch ist, gibt es für alle $y \in A$ offene Teilmengen $U_y, V_y \subseteq X$ mit $x \in U_y$, $y \in V_y$ und $U_y \cap V_y = \emptyset$. Dann ist $\{V_y \cap A\}_{y \in A}$ eine offene Überdeckung von A . Da A kompakt ist, folgt

$$\exists y_1, \dots, y_n \in A \text{ mit } A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}.$$

Setze $U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$. Es gilt $x \in U$ und U ist als endlicher Schnitt offener Mengen offen. Aber

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i=1}^n V_{y_i} \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n U_{y_i} \right) &= \emptyset \\ \Rightarrow A \cap U &= \emptyset \\ \Rightarrow x \in \underbrace{U}_{\text{offen}} &\subseteq X \setminus A \end{aligned}$$

Also ist $X \setminus A$ Umgebung jedes seiner Punkte und damit offen.

(c) ergibt sich, wenn man (a) und (b) zusammennimmt.

(d) Da X kompakt ist, ist X nach Definition Hausdorff'sch (T2-Raum), und damit insbesondere ein T1-Raum. Wir müssen also nur noch die Eigenschaft (T4) zeigen.

Seien also $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. Dann folgt aus (c) direkt: A und B sind kompakt. Da X ein Hausdorff-Raum ist, folgt:

$$\forall a \in A, b \in B \quad \underbrace{\exists U_b(a)}_{a \in} \underbrace{U_a(b)}_{b \in} \text{ offen mit } U_b(a) \cap U_a(b) = \emptyset.$$

Es gilt für alle $a \in A$:

$$B \subseteq \bigcup_{b \in B} U_a(b)$$

und analog für alle $b \in B$:

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_b(a).$$

Da B kompakt ist, gibt es für alle $a \in A$ endlich viele Elemente $b_1, \dots, b_n \in B$ mit

$$(*) \quad B \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_a(b_i) =: V(a) \quad \text{und} \quad \underbrace{\bigcap_{i=1}^n U_{B_i}(a)}_{U(a) :=} \cap V(a) = \emptyset$$

$V(a)$ und $U(a)$ sind als Vereinigung bzw. endlicher Schnitt offener Mengen offen. Es gilt weiter $a \in U(a)$ und:

$$\begin{aligned} A &\subseteq \bigcup_{a \in A} U(a) \\ \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_m \in A \text{ mit } A &\subseteq \bigcup_{j=1}^m U(a_j) \end{aligned}$$

Setze

$$\begin{aligned} V &:= \bigcap_{j=1}^m V(a_j) \supseteq B, \\ U &:= \bigcup_{a \in A} U(a) \supseteq A. \end{aligned}$$

Dann ist $U \cap V = \emptyset$ wegen (*). □

Aus (c) folgt, dass $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ nicht kompakt ist, denn $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ist nicht abgeschlossen:

$$\overline{[0, 1] \cap \mathbb{Q}} = [0, 1] \neq [0, 1] \cap \mathbb{Q}$$

Nun werden wir das Verhalten kompakter Räume unter stetigen Abbildungen untersuchen. Hierfür sei zunächst daran erinnert, dass für eine *bijektive stetige* Abbildung $f : X \rightarrow Y$ folgende Aussagen äquivalent sind:

$$f \text{ offen} \iff f \text{ Homöomorphismus} \iff f \text{ abgeschlossen}$$

Bemerkung 3.3:

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann gilt:

- (a) X quasi-kompakt $\implies f(X)$ quasi-kompakt
- (b) X quasi-kompakt, Y Hausdorff'sch $\implies f$ abgeschlossen

Beweis: (a) Sei $\{V_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$ in Y , also

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Dann ist

$$\underbrace{\bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)}_{=X}$$

eine offene Überdeckung von X , und da X quasi-kompakt ist, gibt es $J \subseteq I$ endlich mit

$$X = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(V_i) = f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right).$$

Dann ist also

$$f(X) = f \left(f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \right) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i,$$

also ist $f(X)$ quasi-kompakt.

- (b) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, X quasi-kompakt. Dann folgt mit dem Lemma 3.2 (a), dass auch A quasi-kompakt ist. Nach (a) ist auch $f(A)$ quasi-kompakt, und da Y zudem Hausdorff'sch ist, ist $f(A)$ kompakt. Dann ist $f(A)$ aber auch abgeschlossen nach Lemma 3.2 (b). $\square$

Mithilfe dieser Bemerkung können wir sehr einfach folgenden Satz beweisen:

Satz 3.4:

Sei X quasi-kompakt, Y Hausdorff'sch und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann gilt:

$$f \text{ bijektiv} \iff f \text{ Homöomorphismus}$$

Beweis:

Wie versprochen wird der sehr kurz:

„ $\Leftarrow$ “ Das ist klar, da Homöomorphismen nach Definition immer bijektiv sind.

„ $\Rightarrow$ “ Nach Bemerkung 3.3 (b) ist f abgeschlossen und damit ein Homöomorphismus. $\square$

3.2. Kompaktifizierung

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, ob es zu jedem topologischen Raum X einen kompakten Raum $\overline{X}$ gibt, sodass X als Teilraum von $\overline{X}$ aufgefasst werden kann.

Tatsächlich ist die Antwort auf diese Frage im Allgemeinen „nein“. Nicht-Hausdorff'sche Räume erfüllen diese Forderung z.B. nicht. Trotzdem lohnt es sich, dieser Fragestellung nachzugehen.

Definition 3.5:

Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Einbettung**, wenn $f : X \rightarrow f(X)$ ein Homöomorphismus ist ($f(X) \subseteq Y$ versehen mit der Spurtopologie).

Eine Einbettung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Kompaktifizierung** von X , wenn Y kompakt und $f(X)$ dicht in Y ist.

Beachte:

- Auch wenn der Begriff „Einbettung“ dies nahelegt, muss X keine Teilmenge von Y im „herkömmlichen Sinne“ sein! Vielmehr fordern wir

$$X \approx f(X) \subseteq Y,$$

was fast genauso gut ist: Dadurch, dass X und $f(X)$ homöomorph sein sollen, d.h. die gleiche topologische Struktur haben, können wir Y als „Erweiterung“ von X auffassen, da wir uns ja sowieso weniger für die Elemente an sich als vielmehr für die Topologie interessieren.

- Die Kompaktifizierung ist dann eine spezielle Einbettung in einen kompakten Raum. Die Dichtheit von $f(X)$ in Y soll unsinnige Erweiterungen ausschließen. Sie sorgt z.B. dafür, dass bei Kompaktifizierung eines bereits kompakten Raumes nicht neues mehr „dazukommt“: Dann ist nämlich auch $f(X)$ kompakt und nach Lemma 3.2 (c) abgeschlossen in Y , oder anders ausgedrückt: $f(X) = \overline{f(X)} = Y$.

Definition 3.6:

Ein topologischer Raum X heißt **lokal kompakt**, falls X Hausdorff'sch ist und jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

Lokale Kompaktheit klingt schon begrifflich „schwächer“ als Kompaktheit, und tatsächlich ist jeder kompakte Raum auch lokal kompakt. Die Umkehrung gilt aber nicht:

Beispiel 19:

$\mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt, aber nicht kompakt.

Beweis: $\mathbb{R}^n$ ist natürlich nicht kompakt, schließlich ist er nicht beschränkt, was nach dem Satz von Heine-Borel für die Kompaktheit aber notwendig wäre (siehe Beispiel 18).

$\mathbb{R}^n$ ist aber wenigstens lokal kompakt, denn jeder Punkt besitzt eine beschränkte und abgeschlossene (und damit kompakte) Umgebung (z.B. eine abgeschlossene Kugel).

Viele gute Eigenschaften kompakter Räume können wir auch in „nur“ lokal kompakten Räumen ausnutzen. Daher ist die Aussage von Beispiel 19 gar nicht mal unangenehm, eher im Gegenteil.

Was wir nun untersuchen wollen, ist der Zusammenhang zwischen lokaler Kompaktheit und Kompaktifizierungen. Gibt es z.B. nur Kompaktifizierungen von lokal kompakten Räumen? Die Antwort ist „nein“, wie folgende Bemerkung zeigt:

Bemerkung 3.7:

Ist $\overline{X}$ ein kompakter topologischer Raum und $X \subseteq \overline{X}$, so ist X nicht notwendigerweise lokal kompakt.

Beweis:

Betrachte etwa $\underbrace{[0, 1] \cap \mathbb{Q}}_{\text{nicht lokal kompakt}} \subseteq \underbrace{[0, 1]}_{\text{kompakt}}.$

□

Insbesondere ist die Bedingung der lokalen Kompaktheit also keinesfalls notwendig für die Existenz einer Kompaktifizierung. Besonders schön wäre dieser Zusammenhang sowieso nicht. Sehr viel schöner ist folgender:

Satz 3.8:

Sei X ein lokal kompakter, aber **nicht kompakter** topologischer Raum. Dann existiert eine Kompaktifizierung $f : X \rightarrow Y$ von X mit $|Y \setminus f(X)| = 1$.

Y ist eindeutig bis auf Homöomorphie und heißt die **Einpunktkompaktifizierung** oder **Alexandroff-Kompaktifizierung** von X .

Den eindeutigen Punkt in $Y \setminus f(X)$ nennt man den **∞ -formen Punkt**.

Bevor wir uns den Beweis anschauen, betrachten wir uns ein konkretes Beispiel, um die Einpunktkompaktifizierung erst einmal besser zu verstehen.

Beispiel 20:

Sei $X = \mathbb{R}^n$ oder $X = B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Die Einpunktkompaktifizierung von X ist homöomorph zu

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

Speziell für $X = \mathbb{R}$ erhalten wir S^1 und für $X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ die Riemann'sche Zahlkugel $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Beweis (Bsp 20): • $f : \mathbb{R}^n \rightarrow B^n, x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$ ist ein Homöomorphismus (siehe Beispiel 10 (a)), d.h. wir brauchen nur den $\mathbb{R}^n$ zu untersuchen, unsere Betrachtungen des $\mathbb{R}^n$ übertragen sich dann automatisch auf $B^n \approx \mathbb{R}^n$.

- $\mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt, aber nicht kompakt, wie wir im Beispiel 19 festgestellt haben. Die Voraussetzungen von Satz 3.8 sind also schonmal erfüllt.
- Die Abbildung $h : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ mit

$$h(y) = \left(1 - \frac{2}{\|y\|^2 + 1}\right) (0, \dots, 0, 1) + \frac{2}{\|y\|^2 + 1} \cdot (y, 0) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

ist eine Einbettung. Die Umkehrabbildung ist die **stereographische Projektion** (winkeltreue Abbildung). S^n ist nach Heine-Borel aber kompakt, also ist h eine Kompaktifizierung. $\square$

Den Rest des Kapitels widmen wir nun dem Beweis von Satz 3.8.

Beweis (3.8):

Sei ∞ ein Symbol mit $\infty \notin X$ und definiere die Menge $Y = X \cup \{\infty\}$.

Definiere auf Y die Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \{O \subseteq Y \mid O \subseteq X \text{ offen}\}, \\ \mathcal{T}_2 &= \{O \subseteq Y \mid \infty \in O \text{ und } Y \setminus O \text{ kompakt in } X\}. \end{aligned}$$

Was wir jetzt zeigen wollen, ist ein wenig aufwändig. Um nicht den Überblick zu verlieren, teilen wir die zu erledigende Arbeit in mehrere Schritte auf:

Schritt 1 Zunächst zeigen wir, dass $\mathcal{T}$ tatsächlich eine Topologie ist.

Schritt 2 Dann müssen wir die Forderung, dass Y kompakt sein soll, nachweisen.

Schritt 3 Wir benötigen natürlich eine Einbettung $\mu : X \rightarrow Y$.

Schritt 4 Schließlich sollte X dicht in Y sein.

Los geht's:

Schritt 1 $\mathcal{T}$ ist Topologie

- $\emptyset, Y \in \mathcal{T}$ ist klar, da $\emptyset \in \mathcal{T}_1$ und $Y \in \mathcal{T}_2$ ist.
- Seien $O_i \in \mathcal{T}_1$ für $i \in I_1$ und $O_i \in \mathcal{T}_2$, also $O_i = Y \setminus K_i$, $K_i \subseteq X$ kompakt, für $i \in I_2$ (und natürlich $I_1 \cap I_2 = \emptyset$). Dann definieren wir die Menge B durch

$$\begin{aligned} B &= \underbrace{\bigcup_{i \in I_1} O_i}_{=: O} \cup \bigcup_{i \in I_2} (Y \setminus K_i) \\ &= O \cup Y \setminus \underbrace{\bigcap_{i \in I_2} K_i}_{K \subseteq X} \\ &= O \cup Y \setminus K \end{aligned}$$

Falls $I_2 = \emptyset$, so ist $B = O$ offen in $\mathcal{T}_1$.

Falls $I_2 \neq \emptyset$, so sind die K_i definitionsgemäß kompakt, $K \subseteq K_i$ ist dann abgeschlossen. Somit ist nach Lemma 3.2 (c) auch K kompakt. Außerdem ist $\infty \in B$ und

$$Y \setminus B = (Y \setminus O) \cap K = \underbrace{(X \setminus O)}_{\text{abgeschlossen}} \cap K \subseteq \underbrace{K}_{\text{kompakt}}$$

Dann ist also $Y \setminus B$ kompakt und $(Y \setminus B) \subseteq X$, also $Y \setminus B \in \mathcal{T}_2$.

(c) Seien wie eben $O_1, \dots, O_k \in \mathcal{T}_1$, $Y \setminus K_1, \dots, Y \setminus K_m \in \mathcal{T}_2$. Definiere diesmal

$$\begin{aligned} B &= \underbrace{O_1 \cap \dots \cap O_k}_{=: O} \cap (Y \setminus K_1) \cap \dots \cap (Y \setminus K_m) \\ &= O \cap (Y \setminus K) \end{aligned}$$

mit $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$. K ist quasi-kompakt, da K Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist. Da X Hausdorff'sch ist, ist K kompakt.

Falls $k = 0$, so ist $B = Y \setminus K \in \mathcal{T}_2$.

Falls $k > 0$, so ist $B = O \cap (Y \setminus K) = O \cap (X \setminus K)$ offen in $X \implies B \in \mathcal{T}_1$.

Schritt 2 Y ist kompakt

(a) Y ist Hausdorff'sch:

Seien $x \neq y \in X = Y \setminus \{\infty\}$. Dann ist die Behauptung erfüllt, da X ja Hausdorff'sch ist.

Im Fall $x \in X$ und $y = \infty$ nutzen wir aus, dass X lokal kompakt ist: Es existiert eine kompakte Umgebung $U \subseteq X$ von x . Dann trennen U und $Y \setminus U$ die Punkte x und y .

(b) Y ist quasi-kompakt:

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y . Dann gibt es insbesondere $i_0 \in I$ mit $\infty \in U_{i_0}$. Dann muss $U_{i_0} \in \mathcal{T}_2$ sein, d.h. $U_{i_0} = Y \setminus K$ für eine geeignete kompakte Menge $K \subseteq X$. Aber $(U_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ ist eine offene Überdeckung von K . Daher gibt es $i_1, \dots, i_n \in I \setminus \{i_0\}$ mit

$$\begin{aligned} K &\subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \\ \Rightarrow Y &\subseteq \bigcup_{j=0}^n U_{i_j}, \end{aligned}$$

also haben wir eine endliche Teilüberdeckung gefunden.

Schritt 3 Einbettung

Die Abbildung $\mu : X \rightarrow Y, x \mapsto x$ ist injektiv, offen und stetig, also eine Einbettung.

Schritt 4 X dicht in Y

Da X nicht kompakt ist, folgt mit Lemma 3.2, dass X nicht abgeschlossen in Y ist. Dann ist $X \subsetneq \overline{X}$. Das einzige mögliche Element, das in $\overline{X}$, aber nicht in X enthalten sein kann, ist ∞ , also $\overline{X} = Y$.

Dass die Einpunktkompaktifizierung bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt ist, bleibt als Übungsaufgabe zu zeigen. $\square$

Beachte: Satz 3.8 besagt, dass jeder lokal kompakte, aber *nicht kompakte* Raum eine Einpunktkompaktifizierung besitzt. Dies ist übrigens nicht nur hinreichend, sondern sogar notwendig:

X besitzt genau dann eine Einpunkt-Kompaktifizierung, wenn X lokal kompakt, aber nicht kompakt ist. Insbesondere muss X Hausdorff'sch sein.

4. Konstruktion topologischer Räume

Wir haben schon gesehen, wie man aus X durch Übergang zu Teilmengen „kleinere“ topologische Räume erzeugt. Die Einpunktkompaktifizierung nicht kompakter, aber lokal kompakter Räume ist bislang das einzige Beispiel einer „Vergrößerung“. Das wollen wir in diesem Kapitel schnellstmöglich ändern.

4.1. Produkte

Zunächst sollten wir uns überlegen, was wir unter einem „Produkt“ von Mengen verstehen wollen. Sicher kennt jeder das *kartesische Produkt* $X \times Y$ zweier Mengen. Weil wir uns nicht auf endliche oder abzählbare Produkte beschränken wollen, sondern größtmögliche Allgemeinheit befürworten, definieren wir zunächst das allgemeine kartesische Produkt von Mengen:

Definition 4.1:

Für beliebige Familien $\{X_i\}_{i \in I}$ von Mengen ist das **kartesische Produkt** definiert durch

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ a : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid a(i) \in X_i \ \forall i \in I \right\}.$$

Diese Definition ist sicher nicht sehr anschaulich. Insbesondere haben wir als Ergebnis des Produkt keine Tupel mehr, sondern Abbildungen von der Indexmenge in die Vereinigung der X_i . Im Falle $I = \{1, \dots, n\}$ können wir aber das allgemeine kartesische Produkt bijektiv auf die Menge der Tupel abbilden und damit im Wesentlichen als gleich ansehen. Jede Abbildung a entspräche einem Tupel, $a(1)$ entspräche dann dem ersten Eintrag im Tupel, $a(2)$ dem zweiten usw. Im Fall $I = \mathbb{N}$ kann man sich ein „unendliches Tupel“ als Folge vorstellen. Falls I jedoch überabzählbar ist, macht eine Anschauung als Tupel gar keinen Sinn mehr. An dieses sehr abstrakte Konzept muss man sich einfach gewöhnen.

Kommen wir jetzt zu unserem eigentlichen Ziel, nämlich auf Produkten topologischer Räume sinnvoll Topologien zu definieren. Statt die gesamte Topologie anzugeben, werden wir dazu einfach eine Basis festlegen, die die Produkttopologie bestimmt.

Definition 4.2:

Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die **Produkttopologie** auf dem kartesischen Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ ist gegeben durch die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \subseteq X_i \text{ offen und } \exists J \subseteq I \text{ endlich mit } U_i = X_i \ \forall i \in I \setminus J \right\}$$

Intuitiv würde man eigentlich erwarten, dass die Basis der Produkttopologie einfach aus den Produkten von offenen Mengen der einzelnen Räume X_i gebildet wird, also $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \subseteq X_i \text{ offen} \right\}$. Dies ist aber nur bei endlichen Produkten richtig. Für den Fall der unendlichen Produkte verlangen wir aber zusätzlich noch, dass nur endlich viele der offenen Mengen $U_i \subseteq X_i$ von X_i verschieden sein dürfen.

Betrachten wir uns ein paar erste Eigenschaften der Produkttopologie.

Bemerkung 4.3:

Für die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $\prod_{i \in I} X_i$ gilt:

- (a) Jede **Projektion** $pr_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ ist stetig.
- (b) $\mathcal{T}$ ist die grösste Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$, für die alle pr_i stetig sind.
- (c) $g : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ stetig $\iff$ für alle $i \in I$ ist $pr_i \circ g : Y \rightarrow X_i$ stetig.

Beweis: (a) Sei $U \subseteq X_j$ offen für $j \in I$. Dann ist

$$pr_i^{-1}(U) = \prod_{i \in I} U_i,$$

wobei $U_i := U$ für $i = j$ und $U_i := X_i$ für $i \neq j$. Die U_i liegen in $\mathcal{B}$, also ist pr_j stetig.

- (b) Jede Topologie, für die alle pr_j stetig sind, enthält die $pr_i^{-1}(U)$ aus (a). Durch endliche Schnitte erhält man $\mathcal{B}$ (d.h. sie „erzeugen“ $\mathcal{B}$).

- (c) „ $\Rightarrow$ “ folgt aus (a) und der Stetigkeit von Kompositionen.

„ $\Leftarrow$ “ Sei $U \subseteq X_j$ offen, dann ist

$$g^{-1}(pr_j^{-1}(U)) = (pr_j \circ g)^{-1}(U) \subseteq Y$$

offen, also ist $g^{-1}(U)$ offen in Y für alle $pr_j^{-1}(U)$.

Aber jedes Element von $\mathcal{B}$ ist endlicher Schnitt von solchen $pr_j^{-1}(U)$, also sind alle Urbilder von Mengen in $\mathcal{B}$ offen, woraus mit Satz 1.16 die Stetigkeit von g folgt. $\square$

Machen wir uns die Bedeutung von Produkten und ihrer Topologien anhand von Beispielen anschaulich klar:

Beispiel 21: (a) Sei $X_i = \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$, dann ist $\prod_{i=1}^n X_i = \mathbb{R}^n$ und die Produkttopologie ist die natürliche Topologie - was allein schon Rechtfertigung für die Definition 4.2 ist.

- (b) Sei $X_1 = X_2 = S^1$. Dann ist $X_1 \times X_2 = S^1 \times S^1$ der **Torus**.

Produkte bieten uns interessanterweise eine neue Möglichkeit zu überprüfen, ob ein Raum Hausdorff'sch ist:

Bemerkung 4.4:

Es gilt:

$$X \text{ Hausdorff'sch} \iff \Delta := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X \text{ ist abgeschlossen}$$

Beweis:

Dass $\Delta \subseteq X \times X$ abgeschlossen ist, ist äquivalent zu der Aussage, dass für alle $(x, y) \notin \Delta$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ existieren mit $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ und $(x, y) \in U \times V$.

Nach der Definition von Δ ist dies aber gleichbedeutend damit, dass für alle $x \neq y$ offene Umgebungen U von x und V von y existieren mit $U \cap V = \emptyset$ - was nichts anderes heißt, als dass X Hausdorff'sch ist. $\square$

Den letzte Satz in diesem Abschnitt widmen wir bezeichnenderweise der Kompaktheit von Produkträumen. Wie der Satz von Tychonoff zeigt, verhält sich diese so vernünftig, wie wir es nur von ihr erwarten können.

Satz 4.5 (Tychonoff):

Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume, $X := \prod_{i \in I} X_i$. Dann gilt:

$$X \text{ (quasi-)kompakt} \iff \text{für alle } i \in I \text{ ist } X_i \text{ (quasi-)kompakt}$$

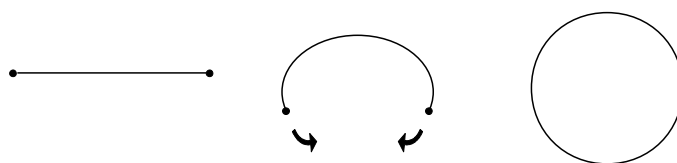
Beweis:

In dieser allgemeinen Formulierung ist der Satz von Tychonoff äquivalent zum Auswahlaxiom. Dies werden wir an dieser Stelle aber nicht beweisen. Für endliche I stellt der Beweis aber eine gute Übung dar ;-)

4.2. Quotienten

Die Möglichkeit, aus gegebenen topologischen Räumen neue zu konstruieren, indem man ihr Produkt betrachtet, war, wenn man so sagen darf, nicht besonders spannend. Zwar haben wir z.B. mit dem Satz von Tychonoff sehr wichtige Aussagen dadurch erhalten, aber die Konstruktionen, die wir betrachtet haben (also $X \times X$ etc.) kann man nicht gerade kreativ nennen.

Deutlich spannendere Konstruktionen kann man als *Quotienten* beschreiben. Betrachten wir etwa folgendes simple „Experiment“: Wir nehmen die Enden einer dünnen Schnur, führen sie zusammen und kleben sie aneinander fest. Wir erhalten etwas, das im Großen und Ganzen aussieht wie ein Kreis:



Um das ganze mathematisch zu beschreiben, stellen wir die Schnur ursprünglich dar als das Intervall $X = [0, 1]$ (d.h. 0 und 1 sind die „Enden“ der Schnur), als Kreis fassen wir wie üblich S^1 auf. Die Enden aneinander zu heften heißt, die Punkte 0 und 1 miteinander zu identifizieren - wir unterscheiden nicht mehr zwischen 0 und 1. Formal ausdrücken können wir dies mithilfe einer *Äquivalenzrelation* auf X :

$$t \sim s \iff (t = 0, s = 1) \text{ oder } (t = 1, s = 0) \text{ oder } (t = s).$$

Die zum Kreis verbundene Schnur wird dann dargestellt durch

$$Y = X/\sim,$$

deren Punkte die Äquivalenzklassen

$$\begin{aligned} [0] = [1] &= \{0, 1\}, \\ [t] &= \{t\} \quad \text{für } 0 < t < 1 \end{aligned}$$

sind. Die eigentliche Herausforderung ist nun, $Y = X/\sim$ so mit einer Topologie auszustatten, dass Y *homöomorph zu S^1* ist. Auf diesen konkreten Fall werden wir später noch einmal zurückkommen. Zunächst aber lassen wir die Katze ganz allgemein aus dem Sack und definieren die Quotiententopologie:

Definition 4.6:

Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X , $X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen in X und $p : X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x]$ die natürliche Abbildung.

Die Menge $\mathcal{T}^\sim := \{O \subseteq X/\sim \mid p^{-1}(O) \text{ offen in } X\}$ heißt die **Quotiententopologie** von $X/\sim$.

$\mathcal{T}^\sim$ ist tatsächlich eine Topologie, wie man ohne besondere Tricks und Kniffe nachrechnen kann:

- Da $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $p^{-1}(X/\sim) = X$, gehören $\emptyset$ und X zu $\mathcal{T}^\sim$.
- Ist $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen aus $\mathcal{T}^\sim$, so ist $p^{-1}(V_i)$ offen in X für alle i , also ist

$$p^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) = \bigcup_{i \in I} p^{-1}(V_i)$$

offen in X , d.h. $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}^\sim$.

- Sind $U, V \in \mathcal{T}^\sim$, so sind $p^{-1}(U)$ und $p^{-1}(V)$ offen in X , also ist auch

$$p^{-1}(U \cap V) = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V)$$

offen in X , also $U \cap V \in \mathcal{T}^\sim$. □

Wir hätten natürlich auch irgendeine andere Topologie auf einer Quotientenmenge definieren können, aber unsere Variante ist die „natürlichste“ von allen: $\mathcal{T}^\sim$ ist die feinste Topologie auf $X/\sim$, für die p stetig ist:

Nach ihrer Konstruktion ist natürlich p stetig (die Definition der Stetigkeit steht quasi schon in Definition 4.6). Sei $\mathcal{T}$ irgendeine andere Topologie auf $X/\sim$, in der p stetig ist. Ist $V \in \mathcal{T}$, so ist nach dieser Voraussetzung $p^{-1}(V)$ offen in X , also ist $V \in \mathcal{T}^\sim$ nach Definition $\implies \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^\sim$. □

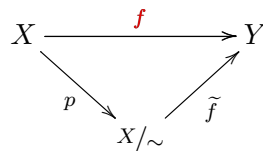
Damit wäre geklärt, dass die natürliche Abbildung sich in Quotientenräumen anständig (d.h. stetig) verhält. Wie sieht es mit anderen Abbildungen aus? Zum Beispiel könnten wir uns fragen, wann Abbildungen aus einem Quotientenraum $X/\sim$ in einen anderen topologischen Raum Y stetig sind. Darauf gibt es schönerweise eine einfache Antwort: Genau dann, wenn ihre Komposition mit p stetig ist!

Satz 4.7:

Sei X ein topologischer Raum mit Äquivalenzrelation $\sim$, Y ein weiterer topologischer Raum und $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y \text{ stetig} \iff f = \tilde{f} \circ p : X \rightarrow Y \text{ stetig}$$

Um nicht den Überblick zu verlieren, wer da sich jetzt wen vorknüpft, hier die Beziehungen nochmal in einem kommutativen Diagramm:



Beweis: „ $\implies$ “ p ist stetig, und die Komposition mit stetigem $\tilde{f}$ dann also auch.

„ $\impliedby$ “ Sei f stetig, $U \subseteq Y$ offen. Dann ist auch

$$f^{-1}(U) = (\tilde{f} \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U))$$

offen. Dann muss aber $\tilde{f}^{-1}(U) = p(f^{-1}(U))$ eine offene Menge sein! □

Eine Komposition $f = \tilde{f} \circ p : X \rightarrow Y$, wie wir sie eben betrachtet haben, verhält sich besonders schön im Zusammenhang mit der Äquivalenzrelation $\sim$. Sind x und x' Punkte aus X , die zur selben Äquivalenzklasse bzgl. $\sim$ gehören, d.h. $x \sim x'$, so ist $p(x) = p(x')$ und damit $f(x) = \tilde{f}(p(x)) = \tilde{f}(p(x')) = f(x')$. Kurz gesagt: f ist konstant auf jeder Äquivalenzklasse!

Noch wichtiger ist aber, dass umgekehrt gilt: Jede Abbildung f , die sich so verhält, ist eine Komposition einer eindeutig bestimmten Abbildung $\tilde{f}$ mit p :

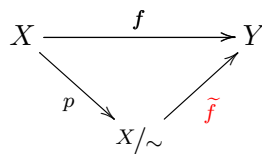
Korollar 4.8 (Universelle Eigenschaft der Quotiententopologie):

Sei X ein topologischer Raum mit Äquivalenzrelation $\sim$, Y ein weiterer topologischer Raum. Für alle stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = f(x')$ falls $x \sim x'$ existiert eine **eindeutige** stetige Abbildung

$$\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y \text{ mit } f = \tilde{f} \circ p$$

Diese Eigenschaft charakterisiert $X/\sim$ und die Quotiententopologie.

Auch hier sollten wir das Diagramm von oben im Hinterkopf behalten. Beachtet aber, dass wir das ganze diesmal „von der anderen Seite her“ betrachten: hier ist f gegeben und wir finden ein passendes $\tilde{f}$. Oben war es gerade umgekehrt, da haben wir mit $\tilde{f}$ angefangen und durch Verknüpfung f erhalten.



Beispiel 22:

Sei X ein topologischer Raum, $f : X \rightarrow Y$ eine (nicht notwendigerweise stetige) Abbildung. Definiere

$$x \stackrel{f}{\sim} x' \iff f(x) = f(x')$$

Die Äquivalenzklassen sind also gerade die Fasern von f .

Wir bezeichnen dann $X/\stackrel{f}{\sim}$ auch einfach mit X/f .

Jetzt muss so langsam mal wieder Kompaktheit ins Spiel kommen. Dies beschert uns eine weitere Folgerung aus dem Satz 4.7:

Korollar 4.9:

Sei X ein topologischer Raum mit Äquivalenzrelation $\sim$, $X' \subseteq X$ eine quasi-kompakte Teilmenge, Y ein Hausdorff-Raum, $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung mit $f(X') = Y$. Dann existiert ein **eindeutig bestimmter** Homöomorphismus

$$\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y \text{ mit } f = \tilde{f} \circ p$$

Beweis:

Nach Korollar 4.8 existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ mit $f = \tilde{f} \circ p$. Da X' quasi-kompakt ist, ist nach Bemerkung 3.3(a) auch $f(X') = Y$ quasi-kompakt. Nach Definition von $\stackrel{f}{\sim}$ ist $\tilde{f}$ bijektiv und damit ist $\tilde{f}$ ein Homöomorphismus nach Satz 3.4. $\square$

Bemerkung 4.10:

Sei X kompakt, $\sim$ Äquivalenzrelation auf X . Dann gilt:

$$X/\sim \text{ Hausdorff'sch} \iff \Gamma := \{(x, y) \mid x \sim y\} \subseteq X \times X \text{ abgeschlossen}$$

(Dies verallgemeinert Bemerkung 4.4 für kompakte Räume)

Beweis:

$p \times p : X \times X \rightarrow X/\sim$ ist stetig.

„ $\Rightarrow$ “ Sei $X/\sim$ Hausdorff'sch. Mit 4.4 folgt, dass

$$\Delta \subseteq X/\sim \times X/\sim$$

abgeschlossen ist. Dann ist aber auch

$$\Gamma = (p \times p)^{-1}(\Delta) \subseteq X \times X$$

abgeschlossen.

„ $\Leftarrow$ “ Wir gehen in zwei Schritten vor. Zunächst zeigen wir, dass $p : X \rightarrow X/\sim$ abgeschlossen ist. Dann folgern wir, dass $X/\sim$ Hausdorff'sch ist.

Schritt 1: $p : X \rightarrow X/\sim$ abgeschlossen

Es sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist auch $A \times X \subseteq X \times X$ abgeschlossen. Es folgt:

$$\Gamma \cap (A \times X) \subseteq X \times X \text{ ist abgeschlossen.}$$

$X \times X$ ist kompakt nach dem Satz von Tychonoff. Damit ist auch $\Gamma \cap (A \times X)$ kompakt nach Lemma 3.2 (c). Daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned} p^{-1}(p(A)) &= \{x \in X \mid \exists y \in A \text{ mit } p(x) = p(y)\} \\ &= \{x \in X \mid \exists y \in A \text{ mit } x \sim y\} \\ &= pr_2(\underbrace{\Gamma \cap (A \times X)}_{\text{kompakt}}) \subseteq X, \end{aligned}$$

also ist $p^{-1}(p(A))$ kompakt nach Bemerkung 3.3. Damit ist $p^{-1}(p(A))$ nach Lemma 3.2 abgeschlossen $\implies p(A) \subseteq X/\sim$ ist abgeschlossen nach Definition der Quotiententopologie. Somit ist p abgeschlossen.

Schritt 2: $X/\sim$ Hausdorff'sch

X ist ein T1-Raum $\stackrel{2.12}{\iff} \{x\} \subseteq X$ ist abgeschlossen für alle $x \in X$. Da p abgeschlossen ist, ist $\{p(x)\} \subseteq X/\sim$ abgeschlossen, also ist auch $X/\sim$ ein T1-Raum.

Seien $z \neq z' \in X/\sim$. Da p stetig ist, sind $p^{-1}(z)$ und $p^{-1}(z') \subseteq X$ abgeschlossen (da X T1-Raum ist), und es gilt $p^{-1}(z) \cap p^{-1}(z') = \emptyset$. Da X normal ist (wegen der Kompaktheit von X) folgt mit Lemma 3.2 (d): Es existieren offene Teilmengen $U, U' \subseteq X$, $U \cap U' = \emptyset$ mit $p^{-1}(z) \subseteq U$ und $p^{-1}(z') \subseteq U'$. Damit gilt

$$\begin{aligned} z \in V &:= X/\sim \setminus \underbrace{p(X \setminus U)}_{\text{abgeschlossen}}, \\ z' \in V' &:= X/\sim \setminus \underbrace{p(X \setminus U')}_{\text{abgeschlossen}}. \end{aligned}$$

Dann sind $V, V' \subseteq X/\sim$ aber offen, $p^{-1}(V) \subseteq U$, $p^{-1}(V') \subseteq U'$ und somit $V \cap V' = \emptyset$. Damit ist $X/\sim$ Hausdorff'sch.

□

4.3. Beispiele für Quotiententopologien

Nachdem wir nun etwas Theorie zusammen haben, wollen wir uns dem eigentlich interessanten Part zuwenden: den wirklich relevanten Beispielen. Hier werden wir auch schon bald unserer anfänglichen Spielerei mit der Schnur wiederbegegnen, nur in einem etwas größeren Zusammenhang.

(I) ZUSAMMENZIEHEN EINES UNTERRAUMS AUF EINEN PUNKT

Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$. Setze

$$x \sim y \iff x = y \text{ oder } \{x, y\} \subseteq A$$

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf X . Schreibe $X/A := X/\sim$.

Beispiel 23:

Und hier ist es schon: $X = [0, 1]$, $A = \partial X = \{0, 1\}$. Dann ist $X/A \approx S^1$.

Die Quotienten-Topologie auf X/A kennen wir ja eigentlich aus Definition 4.6 schon. Wir sollten allerdings dann nochmal „nachrechnen“, dass wir damit tatsächlich auch auf S^1 kommen.

Beweis:

Die Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$ ist surjektiv mit $f(0) = f(1)$, injektiv auf $X \setminus \{0, 1\}$, also

$$x \stackrel{A}{\sim} y \iff f(x) = f(y).$$

Da X quasi-kompakt und S^1 Hausdorff'sch ist, gibt es einen *Homöomorphismus*

$$\tilde{f} : \underbrace{X/A}_{=X/f} \rightarrow S^1.$$

□

Ebenso zeigt man allgemeiner:

$$\begin{aligned} \partial D^n &= S^{n-1} \\ D^n / S^{n-1} &\approx S^n \end{aligned}$$

Wenn man sich die Definition von X/A bildlich vorstellt, wird klar, wie die Überschrift zustandekommt: Die Punkte außerhalb von A lassen wir unbehelligt wie sie sind (die kommen jeweils alleine in ihre ganz persönliche Äquivalenzklasse), die Punkte aus A werden auf einen einzigen Punkt (eine einzige Äquivalenzklasse) „zusammengezogen“, wir unterscheiden nicht mehr zwischen ihnen. So haben wir bei der „Schnur“ die beiden Enden zusammengezogen, an den anderen Punkten hat sich nichts Wesentliches geändert. Wobei „nicht wesentlich“ natürlich so zu verstehen ist, dass wir keine topologischen Eigenschaften verändert haben - man kann sich vorstellen, dass man das „geradelinige“ Intervall $[0, 1]$ neben dem Zusammenziehen von 0 und 1 noch ein bisschen verzerren muss, um einen ordentlichen Kreis hinzubekommen - aber damit ändern wir nichts Gravierendes, was sich nicht mit einem Homöomorphismus wieder „geradebiegen“ ließe (im wahrsten Sinn des Wortes). In ihrer topologischen Ruhe gestört werden nur 0 und 1.

Bemerkung 4.11:

Sei X kompakt, $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist X/A Hausdorff'sch.

Beweis:

Bemerkung 4.10 besagt:

$$X/A \text{ Hausdorff'sch} \iff \Gamma := \{(x, y) \mid x \sim y\} \text{ abgeschlossen in } X \times X$$

Aber

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(x, x) \mid x \in X\} \cup \{(x, y) \mid x, y \in A\} \\ &= \underbrace{\Delta}_{\text{abgeschlossen}} \cup \underbrace{A \times A}_{\text{abgeschlossen}} \end{aligned}$$

nach Bemerkung 4.4, da X Hausdorff'sch.

□

(II) EINPUNKTVEREINIGUNGEN (BOUQUET) TOPOLOGISCHER RÄUME

Angenommen, wir wollen den topologischen Raum untersuchen, der entsteht, wenn wir zwei Kreise zu einer Acht zusammenfügen. Wie stellen wir diesen intuitiv klaren Vorgang formal dar? Der entstehende Raum sollte aus zwei Kreisen bestehen, wobei wir einen Punkt des einen Kreises mit einem Punkt des anderen Kreises identifizieren (als „Verbindungsstelle“ zwischen den Kreisen). Zur Beschreibung des Kreises steht uns die S^1 zur Verfügung. Um aus zwei topologischen Räumen einen einzigen neuen zu erzeugen, der beide umfasst, könnten wir sie in einem ersten Versuch vereinigen. In unserem Fall ergäbe sich dann aber $S^1 \cup S^1 = S^1$, was sicherlich nicht das ist, was wir uns vorstellen. Einen Ausweg bildet die *disjunkte Vereinigung*: Wir fügen die beiden Räume (als Mengen) noch immer zusammen, aber diesmal sollen die Elemente der einen Menge von denen der anderen Menge unterscheidbar bleiben: Der Punkt $(0, 1)$ des einen Kreises soll als verschieden vom Punkt $(0, 1)$ des anderen Kreises betrachtet

werden. Hierfür bekommen beide eine Art „Umhängeschild“, aus welcher Menge sie denn ursprünglich stammen. Hier ist die allgemeine Definition einer solchen disjunkten Vereinigung:

Definition 4.12:

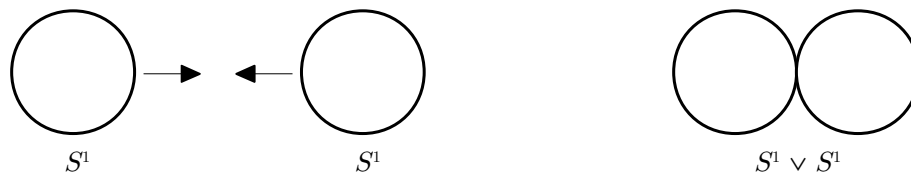
Seien X und Y topologische Räume. Dann heißt

$$X \sqcup Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$$

die **disjunkte Vereinigung** (oder **topologische Summe** oder **topologisches Koprodukt**) von X und Y . Die Topologie auf $X \sqcup Y$ ist folgendermaßen definiert: Alle $U \sqcup V$ mit $U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y$ sind offen.

Analog definiert man topologische Summen $\coprod_{i \in I} X_i$ für beliebig viele Räume X_i .

Okay, mit $S^1 \sqcup S^1$ hätten wir schonmal zwei Kreise, die „nebeneinander“ existieren. Nun brauchen wir noch eine Verbindungsstelle. Suchen wir uns also jeweils einen Punkt aus, an dem wir die Kreise „zusammenstecken“ wollen, und identifizieren sie. Anders ausgedrückt: Wir ziehen diese beiden Punkte auf einen zusammen, wie wir es eben gelernt haben. Damit erhalten wir unsere Einpunktvereinigung zur Acht:



Das sollten wir nun natürlich noch formal aufschreiben und auf beliebige Räume verallgemeinern:

Definition 4.13:

Seien X, Y nichtleere topologische Räume, $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Die **Einpunktvereinigung** von X und Y (in x_0, y_0) ist definiert durch

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) := X \vee Y := X \sqcup Y / \{x_0\} \sqcup \{y_0\}$$

Wieder analog für beliebig viele Mengen:

$$\bigvee_{i \in I} X_i := \coprod_{i \in I} X_i / \coprod_{i \in I} \{x_i\}$$

Unsere Acht schreibt sich damit also als $S^1 \vee S^1$. Die Angabe von x_0 und y_0 ist hier nicht unbedingt notwendig, da die Einpunktvereinigungen in beliebigen Punkten aus S^1 offensichtlich alle homöomorph sind - wir bekommen immer eine Acht, egal, wo wir die Kreise verbinden.

(III) QUOTIENTEN NACH EINER GRUPPENOPERATION

Sei X ein topologischer Raum und G eine Gruppe, die stetig auf X operiert, d.h. es gibt eine Abbildung

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx$$

mit $1x = x, g(hx) = (gh)x$ für alle $g, h \in G, x \in X$, und alle Abbildungen $g : X \rightarrow X$ sind stetig.

Definiere eine Äquivalenzrelation durch

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ mit } gx = y$$

und schreibe $X/G := X/\sim$. Diesen Raum nennen wir **Bahnenraum**.

Beispiel 24:

Sei $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zusammen mit der Multiplikation. Die Operation erfolgt durch Skalarmultiplikation. Dann heißt

$$X/G = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R}^* =: \mathbb{RP}^n$$

der n -dimensionale **reelle projektive Raum**. Die Bahnen sind genau die Geraden durch den Nullpunkt (allerdings ohne diesen selbst).

Analog definiert man den **komplexen projektiven Raum** $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* =: \mathbb{CP}^n$.

Es gilt:

$$\mathbb{RP}^n \approx S^n / \{\pm 1\},$$

wobei $\{\pm 1\}$ auf S^n durch Multiplikation operiert. Insbesondere ist $\mathbb{RP}^1 \approx S^1$.

Beweis:

Sei $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ die Quotientenabbildung. Dann bildet $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ surjektiv auf $\mathbb{RP}^n$ ab. S^n ist kompakt (da beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$), und $\mathbb{RP}^n$ ist Hausdorff'sch, wie man leicht aus der Definition folgert.

Mit Korollar 4.8 erhält man also $\mathbb{RP}^n \approx S^n / \sim = S^n / \{\pm 1\}$, wobei

$$x \sim y \iff p(x) = p(y) \iff x = y \text{ oder } x = -y.$$

Im Fall $n = 1$ haben wir

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \xrightarrow{p} S^1 \subseteq \mathbb{C}, \quad z \mapsto \left(\frac{z}{|z|} \right)^2,$$

f stetig und surjektiv. Ist $|z| = |z'| = 1$, so ist $f(z) = f(z') \iff z = \pm z'$ und somit

$$f|_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1 \text{ surjektiv} \implies S^1 / \{\pm 1\} \approx S^1.$$

nach Korollar 4.8. □

(IV) VERKLEBEN TOPOLOGISCHER RÄUME

Seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $\varphi : A \rightarrow Y$ stetig.

Definition 4.14:

$X \cup_{\varphi} Y := X \sqcup Y / \sim$ mit einer Äquivalenzrelation $\sim$, die erzeugt wird durch

$$(x, 0) \sim (y, 1) \iff x \in A, y = \varphi(x)$$

heißt **Verklebung von X und Y längs φ** .

Beachte: Sind X, Y kompakt, $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $X \cup_{\varphi} Y$ Hausdorff'sch nach Bemerkung 4.9, da dann

$$\Gamma = \{ (\underbrace{x}_{=(x,0)}, \underbrace{\varphi(x)}_{=(\varphi(x),1)}) \mid x \in A \} \cup \Delta$$

abgeschlossen in $(X \sqcup Y)^2$ ist.

- Beispiel 25:** (a) Sei $Y = \{a\}$ einelementig. Dann ist $X \cup_{\varphi} Y \approx X/A$, d.h. alle Punkte von A werden mit a identifiziert.
- (b) Sei $X = D^2$, $A = \partial D^2 = S^1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 = Y$. Dann ist $X \cup_{\varphi} Y$ homöomorph zu einer auf $\mathbb{R}^2$ aufgeklebten Halbkugel.

5. Vollständige metrische Räume

In diesem Kapitel werden wir wieder auf die metrischen Räume zurückkommen, die wir ganz zu Beginn in Kapitel 1 ja schonmal betrachtet haben. Was wir untersuchen wollen, ist „Vollständigkeit“, wie wir sie z.B. von den Axiomen der reellen Zahlen her kennen. Bei ihrer Definition hatten wir gefordert, dass jede Cauchy-Folge konvergieren soll.

Zur Erinnerung: Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge** in einem metrischen Raum (X, d) , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ sodass } \forall m, n \geq N \text{ gilt: } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Das übergeordnete Ziel dieses Kapitels wird es sein, einen beliebigen metrischen Raum in einen größeren, vollständigen metrischen Raum einzubetten. Dies hat zahlreiche Anwendungen z.B. in der Funktionalanalysis oder der Zahlentheorie.

5.1. Vervollständigung metrischer Räume

Definition 5.1:

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert, d.h. einen Grenzwert in X besitzt.

Aus den „Grundlagen der Mathematik“ dürfte bekannt sein, dass in $\mathbb{R}$ jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Dies bleibt auch in beliebigen metrischen Räumen richtig:

Beispiel 26: (a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge

Der Knackpunkt für die Definition der Vollständigkeit ist, dass die Umkehrung nicht immer richtig sein muss, siehe etwa Beispiel (b). Räume, in denen die Umkehrung „ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent“ gilt, nennen wir vollständig.

(b) $\mathbb{R}$ mit seiner natürlichen Metrik ist vollständig, $\mathbb{Q}$ jedoch nicht.

(c) Betrachte beliebiges X mit der diskreten Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ 1 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

(X, d) ist vollständig: Ist $d(x_n, x_m) < 1$, so muss schon $x_n = x_m$ sein. Also ist jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstant ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aber natürlich konvergent.

Definition 5.2:

Seien (X, d) , (X', d') metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ heißt **Isometrie**, wenn für alle $x, x' \in X$ gilt:

$$d(x, x') = d'(f(x), f(x')).$$

X und X' heißen **isometrisch**, falls eine **surjektive** Isometrie zwischen ihnen existiert.

Betrachten wir uns gleich ein paar Eigenschaften von Isometrien:

Bemerkung 5.3:

Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume und $f : X \rightarrow X'$ eine Isometrie. Dann gilt:

(a) f ist injektiv und stetig

(b) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X , so ist $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X'

(c) Sind X und X' isometrisch, so sind sie als topologische Räume homöomorph ($X \approx X'$)

Beweis: (a) **injektiv:** Es gelte $f(x) = f(y)$ für $x \in X, y \in X'$. Dann gilt $d(x, y) = d'(f(x), f(y)) = 0$ und folglich ist $x = y$.

stetig: Für $y = f(x)$ und $\varepsilon > 0$ gilt: $f^{-1}(\underbrace{B_\varepsilon(y)}_{\text{offen}}) = \underbrace{B_\varepsilon(x)}_{\text{offen}}$

(b) Ist $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$, so ist auch $d'(f(x_n), f(x_m)) = d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

(c) f ist dann surjektiv nach Definition und ohnehin injektiv nach (a), also ist f bijektiv. Dann ist auch f^{-1} eine Isometrie, und mit (a) folgt, dass sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Damit ist f also ein Homöomorphismus zwischen X und X' . $\square$

Wir benötigen noch folgende Abschätzung:

Lemma 5.4:

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt für alle $x, x', y, y' \in X$:

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$$

Beweis:

Die Aussage ist eine Folgerung aus der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x') + d(x', y') + d(y, y') \\ \Rightarrow d(x, y) - d(x', y') &\leq d(x, x') + d(y, y'), \end{aligned}$$

und ganz analog auch

$$d(x', y') - d(x, y) \leq d(x, x') + d(y, y').$$

Zusammengenommen zeigt dies die Behauptung. $\square$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Vervollständigungssatz beweisen.

Satz 5.5:

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ und eine Isometrie $\mu : X \rightarrow \hat{X}$ mit $\overline{\mu(X)} = \hat{X}$ (d.h. $\mu(X)$ liegt dicht in $\hat{X}$). $(\hat{X}, \hat{d})$ ist bis auf bijektive Isometrien eindeutig bestimmt und heißt die **Vervollständigung** von X .

Beweis:

Wir gehen in vier Schritten vor:

Schritt 1 Wir konstruieren $(\hat{X}, \hat{d})$,

Schritt 2 Wir konstruieren die Isometrie μ ,

Schritt 3 Wir zeigen die Vollständigkeit von $\hat{X}$,

Schritt 4 Wir zeigen die Eindeutigkeit von $\hat{X}$ bis auf bijektive Isometrien.

Hier die Beweise:

Schritt 1 Konstruktion von $(\hat{X}, \hat{d})$

Sei $CF(X)$ die Menge aller Cauchy-Folgen in X . Definiere folgende Äquivalenzrelation auf $CF(X)$:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff (d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge}$$

Setze $\widehat{X} := {}^{CF(X)}/\sim$ als Menge der Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. Wir schreiben $(\widehat{x})_n$ für die Klasse von (x_n) .

Nun benötigen wir noch eine Metrik auf $\widehat{X}$. Zu $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}$ mit Vertretern $(x_n), (y_n)$ definiere:

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Zu zeigen:

- (a) $(d(x_n, y_n))_n$ konvergiert,
- (b) $\widehat{d}$ ist wohldefiniert, d.h. die Definition ist unabhängig von den gewählten Vertretern,
- (c) $\widehat{d}$ ist tatsächlich eine Metrik auf $\widehat{X}$.

Beweis:

- (a) Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m, n \geq N$. Mit Lemma 5.4 folgt daraus:

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N,$$

d.h. $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und damit konvergent.

- (b) Seien $(x_n) \sim (x'_n), (y_n) \sim (y'_n)$. Dann gilt wieder mit Lemma 5.4

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| &\leq \underbrace{d(x_n, x'_n)}_{\text{Nullfolge}} + \underbrace{d(y_n, y'_n)}_{\text{Nullfolge}} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \widehat{d}(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x'_n, y'_n) = \widehat{d}(x'_n, y'_n) \end{aligned}$$

$$(c) \quad a) \quad \widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \iff (x_n) \sim (y_n) \iff \widehat{x} = \widehat{y}.$$

$$b) \quad \widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \widehat{d}(\widehat{y}, \widehat{x}) \text{ ist klar.}$$

c) Die Dreiecksungleichung von $\widehat{d}$ folgt direkt aus der Dreiecksungleichung von d .

Schritt 2 Konstruktion der Isometrie μ

Sei $\mu : X \rightarrow \widehat{X}, x \mapsto (\widehat{x}_n)$ mit $x_n = x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge). Nach Definition von $\widehat{d}$ ist

$$\widehat{d}(\mu(x), \mu(y)) = d(x, y),$$

also ist μ eine Isometrie.

Zu zeigen: $\mu(X)$ ist dicht in $\widehat{X}$.

Beweis:

Sei $\widehat{x} \in \widehat{X}$ mit Vertreter $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und sei $\varepsilon > 0$. (x_n) ist eine Cauchy-Folge, also gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N \implies \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_N, x_m) \leq \varepsilon$. Daraus folgt aber

$$\widehat{d}(\mu(x_N), \widehat{x}) \leq \varepsilon,$$

d.h. $\mu(X)$ ist dicht in $\widehat{X}$.

Schritt 3 $\widehat{X}$ ist vollständig

Übung

Schritt 4 $\widehat{X}$ ist bis auf bijektive Isometrien eindeutig

Übung

□

Wir geben nun noch ein Beispiel für eine Vervollständigung an.

Beispiel 27 (p -adische Zahlen):

Sei $X = \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Definiere

$$d(a, b) = p^{-m},$$

wobei p^m die kleinste Potenz von p bezeichnet, die $a - b$ teilt.

Dies definiert eine Metrik auf $\mathbb{Z}$. Nach Satz 5.5 gibt es also eine eindeutige Vervollständigung $\mathbb{Z}_p$ (Achtung: hier ist **nicht** $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gemeint!), welche wieder ein Ring ist, der sogenannte **Ring der ganzen p -adischen Zahlen**. Elemente von $\mathbb{Z}_p$ sind Potenzreihen

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot p^n, \quad 0 \leq a_n \leq p$$

5.2. Der Satz von Baire

Beginnen wir mit einem Hilfssatz auf dem Weg zum Satz von Baire:

Lemma 5.6:

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Kugeln in X mit Mittelpunkten x_n ,

$$K_n = \{x \in X \mid d(x, x_n) \leq \varepsilon_n\}$$

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ und $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$

Dann existiert (genau) ein $x \in X$ mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$.

Beweis:

(x_n) ist offenbar eine Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, hat (x_n) einen Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: x$ in X . Für $m \geq n$ ist $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon_n$, und da d stetig ist, auch $d(x, x_n) \leq \varepsilon_n$. Dann ist $x \in K_n$ für alle n und damit $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

Für die Eindeutigkeit („genau ein“) sei y ebenfalls aus $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq 2\varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \implies d(x, y) &= 0 \\ \implies x &= y. \end{aligned}$$

Also gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$.

□

Nun können wir uns unserem letzten wichtigen Satz aus der mengentheoretischen Topologie widmen:

Satz 5.7 (Baire):

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $A_1, A_2, \dots$ seien (abzählbar unendlich viele) abgeschlossene Teilmengen von X und $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann gilt:

A enthält eine offene Kugel $\implies$ mindestens ein A_n enthält eine offene Kugel.

Beweis:

Sei $B_0 = B(x_0, \varepsilon_0) \subseteq A$ eine offene Kugel in A . Wir führen einen Widerspruchsbeweis.

Annahme: Für alle $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ gilt: $X \setminus A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ (d.h. kein A_n enthält eine offene Kugel).

Definiere induktiv die Folge von abgeschlossenen Kugeln $K_n = K_n(x_n, \varepsilon_n) = \{x \in X \mid d(x, x_n) \leq \varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$,

$$K_{n+1} \subseteq (X \setminus A_{n+1}) \cap \underbrace{B_n(x_n, \varepsilon_n)}_{\subseteq K_n}$$

$n = 1$: $(X \setminus A_1) \cap B_0$ ist offen und nach Annahme nicht leer (da $B_0 \not\subseteq A_1$). Dann gibt es also eine abgeschlossene Kugel

$$K_1 = K_1(x_1, \varepsilon_1) = \{x \in X \mid d(x, x_1) \leq \varepsilon_1\}$$

mit $\varepsilon_1 < 1$.

$n \rightarrow n+1$: $(X \setminus A_{n+1}) \cap B_n(x_n, \varepsilon_n)$ ist offen und nicht leer. Also existiert eine abgeschlossene Kugel

$$K_{n+1} = K_{n+1}(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) = \{x \in X \mid d(x, x_{n+1}) \leq \varepsilon_{n+1}\} \subseteq (X \setminus A_{n+1}) \cap B(x_n, \varepsilon_n)$$

mit $\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{n+1}$.

Nach Konstruktion ist $K_{n+1} \subseteq B(x_n, \varepsilon_n) \subseteq K_n$, also $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$. Aus Lemma 5.6 folgt damit: $\exists x \in X$ mit

$$\begin{aligned} \{x\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus A_n) \\ &= X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ &= X \setminus A, \end{aligned}$$

also $x \notin A$. Aber andererseits gilt $x \in K_1 \subseteq B_0 \subseteq A$. Widerspruch! □

Eine äquivalente Formulierung des Satzes von Baire liefert folgendes Korollar:

Korollar 5.8:

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge offener, dichter Teilmengen von X . Dann ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ ebenfalls dicht in X .

Beweis:

Angenommen, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ wäre nicht dicht. Dann ist also das Innere von $X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ nicht leer, d.h. $X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ enthält eine offene Kugel. Aber

$$X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(X \setminus B_n)}_{\text{abgeschlossen}}$$

Nach dem Satz von Baire gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $X \setminus B_n$ eine offene Kugel enthält. Aber damit ist B_n nicht dicht. Widerspruch! □

Der Satz von Baire hat wichtige Anwendungen in der Funktionalanalysis. So ist er etwa elementarer Bestandteil der Beweise folgender Sätze:

- Satz über offene Abbildungen (Banach-Schauder)
- Satz vom abgeschlossenen Graphen
- Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Banach-Steinhaus)

An dieser Stelle endet unser Studium der mengentheoretischen Topologie. Fortan werden wir uns der algebraischen Topologie widmen.

Teil II.

Algebraische Topologie

Wie der Name schon andeutet, beschäftigt sich die algebraische Topologie mit dem Lösen topologischer Probleme mithilfe algebraischer Methoden. Insbesondere müssen wir dazu topologische Strukturen mit algebraischen Strukturen verknüpfen. Dies wird uns z.B. zu dem Begriff der Fundamentalgruppe führen, also einer Gruppenstruktur im algebraischen Sinne, die wir mit einer topologischen Struktur in Beziehung setzen.

Wenn wir mit solchen eigentlich doch sehr verschiedenen „Strukturen“ arbeiten, ist es sinnvoll, Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser Strukturen benennen zu können. Hierfür ist die Sprache der *Kategorien* hilfreich, deswegen werden wir sie an dieser Stelle kurz einführen.

Definition:

Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Klasse von mathematischen **Objekten**,
- zu jedem Paar (X, Y) von Objekten eine Menge $Mor(X, Y)$ von **Morphismen von X nach Y** , wobei $Mor(X, Y)$ und $Mor(X', Y')$ für $(X, Y) \neq (X', Y')$ disjunkt sein sollen. Statt $f \in Mor(X, Y)$ schreibt man auch $f : X \rightarrow Y$ (Achtung: weder müssen X, Y Mengen sein, noch f eine Abbildung!)
- und schließlich einer Verknüpfung $\circ : Mor(X, Y) \times Mor(Y, Z) \rightarrow Mor(X, Z)$ von Morphismen. Man schreibt $(f, g) \mapsto g \circ f$.

Dabei müssen folgende Axiome erfüllt sein:

- (a) **Assoziativität:** Sind $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$ Morphismen, so gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- (b) **Identität:** Für jedes Objekt X existiert ein Morphismus $1_X : X \rightarrow X$ mit $1_X \circ f = f$ und $g \circ 1_X = g$ für alle Morphismen $f : Y \rightarrow X, g : X \rightarrow Z$.

Klingt sehr abstrakt, ist es auch, und deshalb füllen wir den Begriff der Kategorie sofort mittels relevanter Beispiele mit Leben:

Beispiel 28: (a) Die Kategorie der Mengen: die Objekte sind Mengen, die Morphismen sind (beliebige) Abbildungen, die Verknüpfung ist die übliche Verkettung von Abbildungen.

(b) Schon wesentlich interessanter: Die Kategorie $\mathcal{T}op$ der topologischen Räume (= Objekte) mit ihren stetigen Abbildungen (= Morphismen) und der üblichen Verknüpfung.

(c) Die Kategorie der Gruppen (= Objekte) mit ihren Gruppenhomomorphismen (= Morphismen).

(d) Die Kategorie der Vektorräume (= Objekte) über einem Körper K mit ihren K -linearen Abbildungen (= Morphismen).

Nachdem in diesen bekannten Kategorien die Morphismen immer Abbildungen waren, noch ein wichtiges Beispiel, in dem das nicht der Fall ist. Allerdings braucht es zum Verständnis dieses Beispiels ein kleinwenig Vorwissen über Homotopie (siehe Kapitel 6):

(e) Die **Homotopiekategorie** hat als Objekte wie $\mathcal{T}op$ topologische Räume, die Morphismen sind aber die *Homotopieklassen* $Mor(X, Y) = [X, Y]$ stetiger Abbildungen, und die Verknüpfung ist als Verknüpfung der Repräsentanten definiert: $[g] \circ [f] = [g \circ f]$.

Wie gesagt, nach den ersten zwei Seiten von Kapitel 6 wird sich die Bedeutung der Homotopiekategorie aufklären.

Nun haben wir die uns betreffenden Strukturen schonmal in Kategorien eingeteilt. Wenn wir sie jetzt miteinander in Beziehung bringen wollen, benötigen wir ein „Bindeglied“ zwischen zwei Kategorien. Dies sind die sogenannten *Funktoren*:

Definition:

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Eine Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, durch die zu jedem Objekt aus $\mathcal{C}$ ein Bildobjekt aus $\mathcal{D}$ und zu jedem Morphismus $\varphi : X \rightarrow Y$ aus $\mathcal{C}$ ein Morphismus $\mathcal{F}(\varphi) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ aus $\mathcal{D}$ definiert ist, heißt **kovarianter Funktor**, wenn gilt:

- (a) **Identitätsaxiom:** $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$
- (b) **Kettenregel:** $\mathcal{F}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{F}(\varphi) \circ \mathcal{F}(\psi)$

Es gibt auch **kontravariante** Funktoren, die sich von den kovarianten nur darin unterscheiden, dass die Richtung der Morphismen unter $\mathcal{F}$ umgekehrt ist: Jedem Morphismus $\varphi : X \rightarrow Y$ aus $\mathcal{C}$ wird ein Morphismus $\mathcal{F}(\varphi) : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ zugeordnet. Dadurch ändert sich natürlich auch die Kettenregel ein wenig: $\mathcal{F}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{F}(\psi) \circ \mathcal{F}(\varphi)$.

Mit kontravarianten Funktoren werden wir uns in dieser Vorlesung aber nicht beschäftigen, das ganze nur nebenbei zur allgemeinen Verwirrung.

Schaffen wir wieder Klarheit durch einige Beispiele:

- Beispiel 29:**
- (a) Die „Identität“ $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, die jedem Objekt und jedem Morphismus sich selbst zuordnet, ist natürlich ein (kovarianter) Funktor, wenn auch kein interessanter.
 - (b) Fast genauso langweilig, aber auch Funktoren sind konstante Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, die allen Objekten ein festes Objekt X_0 zuordnen, die Morphismen gehen alle auf die Eins 1_{X_0} . Die konstanten Funktoren sind sowohl ko- als auch kontravariant.
 - (c) Etwas interessanter sind da schon „Vergissfunktoren“, z.B. von der Kategorie $\mathcal{T}op$ der topologischen Räume in die der Mengen. Dabei wird dem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ die Menge X zugeordnet, der stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ die (normale) Abbildung $f : X \rightarrow Y$. Dabei wird einfach ein Teil der Struktur „vergessen“ – X ist zwar noch eine Menge, aber dass wir es sogar mit einem topologischen Raum zu tun hatten, unterschlägt dieser Funktor.

Das klingt alles immer noch recht „überflüssig“, weil diese Beispiele nicht viel Gehalt haben, aber wir werden weitaus wichtigeren, sinnvolleren Funktoren in der algebraischen Topologie wiederbegegnen – an diesen Stellen solltet Ihr Euch einfach an diese Definition zurückerinnern (oder sie nachschlagen), dann wird das ganze etwas lebendiger. Aber solange wir die Funktoren noch nicht brauchen, müssen sie einen sicherlich nicht durch ihre Abstraktheit abschrecken.

6. Homotopie

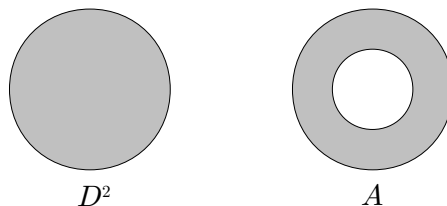
Die Scheibe

$$D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$$

und der Ring

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\right\}$$

scheinen nicht homöomorph zu sein.



Allerdings unterscheiden sich diese beiden Räume in keiner der topologischen Eigenschaften, die wir bislang betrachtet haben: beide sind wegzusammenhängend, lokal zusammenhängend, kompakt und metrisierbar (und damit dann auch zusammenhängend, lokal kompakt und Hausdorff'sch).

Von der Anschauung her scheint es plausibel, dass die Scheibe D^2 stetig zu einem Punkt „zusammengeschrumpft“ werden könnte, der Ring A aber nicht. Ebenso scheint A stetig zu einem Kreis deformiert werden zu können, D^2 aber nicht. Und schließlich hat A ein Loch, D^2 nicht!

Diese Ideen führen uns zur Homotopietheorie, die genau solche Fragen behandelt: Kann ein Raum stetig in einen anderen umgeformt werden. Oder auch: Kann eine Abbildung stetig in eine andere deformiert werden?

6.1. Homotopie von Abbildungen

Versuchen wir also, diese intuitiven Ideen formal zu fassen, um mit ihnen schließlich mathematisch sauber zwischen D^2 und A unterscheiden zu können.

Wie könnte man das „stetige Zusammenschrumpfen“ eines Raumes X zu einem Punkt $y \in X$ mathematisch interpretieren? Es sollte sich um einen stetigen Prozess handeln, der in einem Zeitintervall jeden Punkt $x \in X$ zum Punkt y bewegt. Dieses Zeitintervall stellen wir wie üblich mit $[0, 1]$ dar (wobei es mit 0 losgeht und mit 1 aufhört). Wenn wir mit $H(x, t)$ die Position des Punktes $x \in X$ zur Zeit $t \in [0, 1]$ bezeichnen, dann sollte gelten

$$H(x, 0) = x \quad \text{und} \quad H(x, 1) = y.$$

Aus dieser Vorstellung können wir eine passende Definition schustern:

Definition 6.1:

Eine **Kontraktion** eines topologischen Raums X zu einem Punkt $y \in X$ ist eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow X$$

mit

$$H(x, 0) = x \quad \text{und} \quad H(x, 1) = y$$

für alle $x \in X$.

Wenn es eine Kontraktion von X zu einem Punkt aus X gibt, heißt X **kontrahierbar** (oder **zusammenziehbar**).

Beispiel 30:

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, falls es ein $x_0 \in X$ gibt, sodass für alle $x \in X$ und $0 \leq t \leq 1$ auch $(1-t)x + tx_0$ in X liegt. Dies ist die direkte Verbindungsstrecke von x nach x_0 .

Jede sternförmige Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar, denn die Abbildung

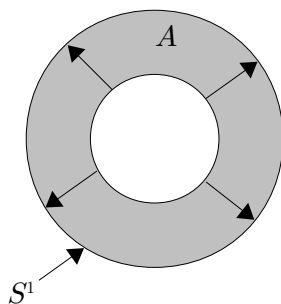
$$\begin{aligned} H : X \times [0, 1] &\rightarrow X, \\ (x, t) &\mapsto (1-t)x + tx_0 \end{aligned}$$

ist eine Kontraktion von X nach x_0 .

Insbesondere sind also $\mathbb{R}^n$, D^n und B^n kontrahierbar.

Wie schon eingangs vermutet, ist der Ring A nicht kontrahierbar - was wir aber erst später beweisen werden, im Moment begnügen wir uns damit, zu akzeptieren, dass nicht jeder Raum kontrahierbar ist. Aber auch nicht kontrahierbare Räume können wir manchmal stetig zu geeigneten Teilmengen deformieren - z.B. sollte es doch möglich sein, den Ring A stetig zu einem Kreis S^1 zu „verdünnen“.

Verallgemeinern wir also das Zusammenziehen eines Raumes X zu einem Punkt $y \in X$ auf ein „Zusammenziehen“ (man sagt besser „deformieren“) auf eine ganze Teilmenge $E \subseteq X$. Dabei wäre es sinnvoll, wenn die Punkte aus E selbst schließlich wieder auf sich selbst landen - wenn wir den Ring zum Kreis deformieren, können wir den äußeren Rand des Ringes ja einfach so lassen, wie er ist.



Folgende Definition erfüllt unsere Ansprüche:

Definition 6.2:

Sei E ein Teilraum eines topologischen Raumes X . Eine **Deformationsretraktion** von X auf E ist eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow X$$

mit

$$H(x, 0) = x \quad \text{und} \quad H(x, 1) \in E \quad \text{für alle } x \in X$$

und

$$H(y, 1) = y \quad \text{für alle } y \in E.$$

Wenn es eine Deformationsretraktion von X auf E gibt, heißt E ein **Deformationsretrakt** von X .

Beispiel 31:

Der Kreis S^1 ist ein Deformationsretrakt des Rings A (Überraschung)! Wir können jeden Punkt $x \in A$ auf gerader Linie zum Punkt $\frac{1}{\|x\|}x \in S^1$ schieben. Definieren wir formaler eine Deformationsretraktion $H : A \times [0, 1] \rightarrow A$

von A auf S^1 , so lautet dies so:

$$H(x, t) = (1 - t)x + t \left(\frac{1}{\|x\|} x \right).$$

Diese Formel liefert auch eine Deformationsretraktion der gelochten Scheibe $D^2 \setminus \{0\}$ auf S^1 .

Eine Deformationsretraktion $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ von X auf $E \subseteq X$ können wir als stetige Familie von Wegen $t \mapsto H(x, t)$ in X betrachten, die in E enden - ein Weg für jedes $x \in X$.

Genauso können sie betrachten als stetige Familie stetiger Abbildungen

$$\begin{aligned} h_t : X &\rightarrow X, \\ x &\mapsto H(x, t), \end{aligned}$$

eine Abbildung für jedes $t \in [0, 1]$, wobei h_0 die Identität auf X ist und h_1 die Menge X auf E abbildet, wobei die $x \in E$ schön dort sitzen bleiben, wo sie sind (d.h. $h_1(x) = x$ für alle $x \in E$).

Von diesem Standpunkt aus gesehen ist H also ein stetiger Prozess, der die Abbildung h_0 in die Abbildung h_1 deformiert. Damit wären wir endlich beim Homotopiebegriff angelangt. In dieser letzte (und wichtigsten) Stufe der Verallgemeinerung lassen wir nun h_0 und h_1 noch etwas mehr Freiheit, d.h. h_0 muss nicht mehr die Identität sein, und auch h_1 kann im Rahmen des Stetigen machen was es will - sogar in einen Raum Y dürfen sie abbilden. Und damit haben wir sie dann schon, die Homotopie:

Definition 6.3:

Seien X, Y topologische Räume und $f, g : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

mit

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad H(x, 1) = g(x) \quad \text{für alle } x \in X$$

heißt **Homotopie zwischen f und g** . Wir schreiben $H : f \simeq g$.

f und g heißen **homotop** ($f \simeq g$), falls eine Homotopie zwischen ihnen existiert.

Nochmal die Interpretation dieser Definition mit den Bezeichnungen:

H ist eine einparametrische Familie stetiger Funktionen

$$\begin{aligned} h_t = H(\cdot, t) : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto H(x, t), \end{aligned}$$

die $f = h_0$ stetig in $g = h_1$ „deformiert“.

Beispiel 32: (a) Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Abbildungen in die reellen Zahlen. Dann gilt schon ohne weiteres $f \simeq g$, z.B. mit der Homotopie

$$H(x, t) = (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot g(x).$$

Anders ausgedrückt: alle Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{R}$ sind homotop!

(b) Sei X ein topologischer Raum mit einem Element, also $X = \{x\}$. Dann gilt: $f, g : X \rightarrow Y$ sind genau dann homotop, wenn $f(x), g(x)$ in derselben Wegzusammenhangskomponente von Y liegen.

(c) Später werden wir sehen: Die Abbildungen

$$\begin{aligned} id : S^1 &\rightarrow S^1, \quad x \mapsto x \quad \text{und} \\ f : S^1 &\rightarrow S^1, \quad x \mapsto 1 \end{aligned}$$

sind *nicht* homotop.

Das Zeichen $\simeq$ für „homotop“ lässt schon mutmaßen, ob es sich hierbei vielleicht um eine Äquivalenzrelation handeln könnte. Tatsächlich ist das auch so, und wie folgende Bemerkung zeigt, ist das auch nicht schwer einzusehen.

Bemerkung 6.4:

Seien X, Y topologische Räume. Dann ist $\simeq$ eine Äquivalenzrelation auf $\{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ stetig}\}$.

Beweis:

Wie immer müssen wir die drei Axiome von Äquivalenzrelationen nachweisen:

- $f \simeq f$ mit $H(x, t) = f(x)$ (unabhängig von t).
- Sei $H : f \simeq g$. Dann definiert $H'(x, t) := H(x, 1 - t)$ eine Homotopie von g nach f .
- Seien $H : f \simeq g$, $H' : g \simeq h$. Dann ist

$$G(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t) & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H'(x, 2t - 1) & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach h . □

Wenn wir eine Äquivalenzrelation haben, haben wir auch Äquivalenzklassen:

Definition 6.5:

Seien X, Y topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann heißt

$$[f] := \{g : X \rightarrow Y \mid g \simeq f\}$$

die **Homotopieklasse** von f . Außerdem bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen mit

$$[X, Y] := \{[f] \mid f : X \rightarrow Y \text{ stetig}\}$$

und setzen

$$1_X := [id_X] \in [X, X].$$

Abbildungen f und g können wir per $\circ$ miteinander verknüpfen. Schön wäre es, wenn wir das auch mit Homotopieklassen von Abbildungen könnten, etwa durch $[f] \circ [g] := [f \circ g]$. Da wir diese Verknüpfung aber über Repräsentanten der Homotopieklasse definieren, müssen wir prüfen, ob das auch wohldefiniert war.

Bemerkung 6.6:

Seien X, Y, Z topologische Räume, $f, f' : X \rightarrow Y$ und $g, g' : Y \rightarrow Z$ stetig. Dann gilt:

$$f \simeq f' \text{ und } g \simeq g' \implies g \circ f \simeq g' \circ f'$$

Beweis:

Seien $F : f \simeq f'$ und $G : g \simeq g'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g \circ F & : \quad g \circ f \simeq g \circ f' \text{ und} \\ G \circ (f' \times id_{[0,1]}) & : \quad g \circ f' \simeq g' \circ f' \end{aligned}$$

Dabei ist $(G \circ (f' \times id_{[0,1]}))(x, t) = G(f'(x), t)$.

Wegen der Transitivität von $\simeq$ folgt also $g \circ f \simeq g \circ f' \simeq g' \circ f'$. □

Mit anderen Worten: Die Homotopieklassen stetiger Abbildungen können tatsächlich durch $[f] \circ [g] := [f \circ g]$ komponiert werden, diese Definition ist vertreterunabhängig.

Definition 6.7:

Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Homotopieäquivalenz** (in Zeichen $f : X \simeq Y$), falls gilt:
Es existiert eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f \simeq id_X$ und $f \circ g \simeq id_Y$, also

$$\begin{aligned} [g] \circ [f] &= 1_X & \text{und} \\ [f] \circ [g] &= 1_Y. \end{aligned}$$

$f : X \rightarrow Y$ heißt **nullhomotop**, falls es ein $y_0 \in Y$ gibt mit $f \simeq c_{y_0}$, wobei $c_{y_0} : X \rightarrow Y, x \mapsto y_0$ eine konstante Abbildung ist.

In der Kategoriensprache bedeutet Homotopieäquivalenz von Räumen X und Y : X und Y sind isomorph in der Restklassenkatgorie der topologischen Räume und Homotopieklassen stetiger Abbildungen.

Beachte:

- (a) Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation,
- (b) Homöomorphe Räume sind homotopieäquivalent.

Mit den Begriffen aus Definition 6.7 können wir sehr elegant die Zusammenziehbarkeit eines Raumes ausdrücken⁴:

Lemma 6.8:

X ist genau dann zusammenziehbar, wenn die Identität $id_X : X \rightarrow X$ nullhomotop ist.

Beweis:

Kommt noch...

□

Bemerkung 6.9:

Sei X ein topologischer Raum. Es gilt:

- (a) X wegzusammenhängend $\implies$ für alle $x, y \in X$ ist $c_x \simeq c_y$
- (b) X zusammenziehbar $\implies X$ wegzusammenhängend
- (c) Jede stetige Abbildung in einem zusammenziehbaren Raum ist nullhomotop

Beweis: (a) Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von x nach y , also $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ und γ stetig. Dann ist

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow X, \quad (z, t) \mapsto \gamma(t)$$

die gesuchte Homotopie.

(b) Übung.

(c) Übung.

□

Beispiel 33:

Entfernt man aus dem $\mathbb{R}^n$ einen Punkt (z.B. den Nullpunkt), so ist der entstehende Raum homotopieäquivalent zur Sphäre S^{n-1} :

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$$

Insbesondere ist also z.B. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1$.

Beweis: Sei $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Inklusion. Dann ist f stetig. Sei weiter

$$g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

⁴In der Vorlesung wurde Zusammenziehbarkeit tatsächlich so definiert wie im folgenden Lemma

Auch g ist stetig. Damit gilt $g \circ f = id_{S^{n-1}}$, also insbesondere natürlich $g \circ f \simeq id_{S^{n-1}}$.

Für $f \circ g$ betrachte die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad , \quad (x, t) \mapsto \frac{x}{t \cdot (\|x\| - 1) + 1}$$

F ist stetig, und es gilt

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}, \\ F(x, 1) &= (f \circ g)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Damit ist F Homotopie von $f \circ g$ und $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. □

Bemerkung 6.10:

Sei $f : S^n \rightarrow Y$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) f ist nullhomotop
- (b) $\exists$ stetige Abbildung $F : D^{n+1} \rightarrow Y$ mit $F|_{S^n} = f$

Beweis:

Für die Richtung „ $\Rightarrow$ “ müssen wir eine stetige Funktion wie in (b) finden, für die Richtung „ $\Leftarrow$ “ eine Homotopie von f zu einer konstanten Abbildung.

„ $\Rightarrow$ “ Sei $H : f \simeq c_{y_0}$ die Homotopie von f zu einer konstanten Abbildung

$$c_{y_0} : S^n \rightarrow Y \quad , \quad x \mapsto y_0.$$

Setze

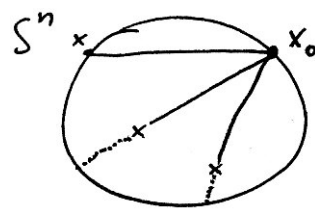
$$F(x) = \begin{cases} y_0 & , \quad \|x\| \in [0, \frac{1}{2}] \\ H\left(\frac{x}{\|x\|}, 2(1 - \|x\|)\right) & , \quad \|x\| \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

F ist stetig mit $F|_{S^n} = H(x, 0) = f(x)$.

„ $\Leftarrow$ “ Sei $x_0 \in S^n$ beliebig, aber fest. Definiere

$$H : S^n \times [0, 1] \rightarrow Y \quad , \quad (x, t) \mapsto F((1 - t)x + tx_0).$$

Dies liefert $f \simeq c_{f(x_0)} = c_{F(x_0)}$. □



Zum Abschluss dieses Abschnittes notieren wir noch eine Folgerung aus den letzten beiden Bemerkungen:

Korollar 6.11:

Sei Y kontrahierbar und $f : S^n \rightarrow Y$ stetig. Dann gibt es eine stetige Fortsetzung

$$F : D^{n+1} \rightarrow Y \quad \text{mit} \quad F|_{S^n} = f.$$

Beweis:

Nach Bemerkung 6.9 (c) ist jede stetige Abbildung in einen kontrahierbaren Raum nullhomotop. Daraus folgt die Behauptung mit Bemerkung 6.10. □

6.2. Die Fundamentalgruppe

In diesem Abschnitt wollen wir vor allem Homotopien von *Wegen* betrachten. Wie wir z.B. in Bemerkung 6.9 gesehen haben, haben wegzusammenhängende Räume einige schöne Homotopieeigenschaften. Einige mehr werden wir im folgenden noch kennenlernen. Zuvor werden wir aber noch ein paar allgemeine Überlegungen zu Wegen anstellen, um die Möglichkeiten, die ihre Betrachtung bietet, voll ausschöpfen zu können.

Eine elementare Operation, die man mit Wegen durchführen kann, ist ihre Verknüpfung zu einem neuen, „längeren“ Weg - vorausgesetzt der eine Weg hört da auf, wo der andere anfängt. Folgende Definition führt die Verbindung zweier solcher Wege ein.

Definition 6.12:

Seien α, β Wege im topologischen Raum X (d.h. stetige Abbildungen $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$) mit $\alpha(1) = \beta(0)$. Das **Wegprodukt** $\alpha * \beta$ ist der Weg

$$\alpha * \beta : [0, 1] \rightarrow X, \quad (\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Da Wege ja immer Abbildungen von $[0, 1]$ (als „Zeitintervall“) in einen topologischen Raum sind, müssen wir „doppelt so schnell“ gehen, um den Weg $\alpha * \beta$ einmal zu durchlaufen. Für jedes der beiden Teilstücke α und β benötigen wir dabei die Hälfte der Zeit.

Beachte: $\alpha * \beta$ ist offensichtlich stetig.

Beispiel 34:

Betrachte $f : [0, 1] \rightarrow S^1, f(t) = e^{2\pi it}$. Dann gilt $f * f = g$ mit $g(t) = e^{4\pi it}$.

Während durch f der Kreis einmal durchlaufen wird, wird er durch g zweimal durchlaufen, und zwar mit doppelter Geschwindigkeit.

Im folgenden Lemma werden wir zeigen, dass das Wegprodukt auf Homotopieklassen wohldefiniert ist.

Lemma 6.13:

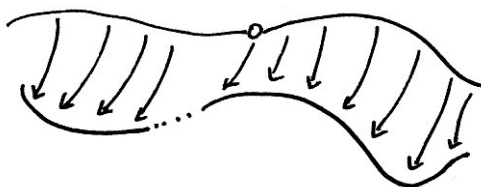
Seien $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ Wege in X mit $\alpha(1) = \beta(0)$, $\alpha'(1) = \beta'(0)$ und $\alpha \simeq \alpha', \beta \simeq \beta'$. Dann gilt $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$.

Beweis:

Sei $F : \alpha \simeq \alpha', G : \beta \simeq \beta'$. Setze

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad (s, t) \mapsto H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & , \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & , \quad \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases}.$$

Dann gilt $H : \alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$. □



Nach Bemerkung 6.4 ist Homotopie von Wegen eine Äquivalenzrelation. Mit $[\alpha]$ werden wir nach wie vor die Klasse des Weges α bezeichnen - mit einer Einschränkung, die für alle Homotopieklassen von Wegen ab jetzt bis zum Ende des Skripts gelten soll:

Vereinbarung:

Mit Homotopieklassen von Wegen $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ meinen wir die Klasse der zu α homotopen Wege mit **gleichem Anfangs- und Endpunkt!** Das heißt

$$[\alpha] := \{ \alpha' : [0, 1] \rightarrow X \mid \alpha' \simeq \alpha \text{ und } \alpha'(0) = \alpha(0), \alpha'(1) = \alpha(1) \}$$

Lemma 6.13 besagt: Die Verknüpfung

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$$

über die Vertreter α und β ist wohldefiniert. Folgende Definition führt „stehen bleiben“ und „rückwärts laufen“ ein.

Definition 6.14:

Der **konstante Weg** an $x \in X$ ist der Weg

$$\varepsilon_x : [0, 1] \rightarrow X, \quad \varepsilon_x(t) := x.$$

Ist $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg, so ist der **inverse Weg** zu α der Weg

$$\alpha^{-1} : [0, 1] \rightarrow X, \quad \alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t).$$

Beachte: Nicht den inversen Weg α^{-1} mit der Umkehrabbildung von α verwechseln! Für den inversen Weg durchlaufen wir α einfach rückwärts.

Bemerkung 6.15:

Sei $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg. Dann gelten:

(a) Sind $\beta, \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ Wege mit $\alpha(1) = \beta(0)$, $\beta(1) = \gamma(0)$, so gilt

$$(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma).$$

(b) Sei ε_x der konstante Weg an x . Dann ist $\varepsilon_x * \alpha \simeq \alpha$ und $\alpha * \varepsilon_x \simeq \alpha$.

(c) Es gilt $\alpha * \alpha^{-1} \simeq \varepsilon_{\alpha(0)}$ und $\alpha^{-1} * \alpha \simeq \varepsilon_{\alpha(1)}$.

Beweis: (a) Sei

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto f(t) = \begin{cases} 2t & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ t + \frac{1}{4} & , \quad \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Nach Definition ist dann $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma) \circ f$. Da $[0, 1]$ kontrahierbar ist, gilt $f \simeq id_{[0,1]}$ (dies zu zeigen ist eine Übungsaufgabe). Damit folgt:

$$\alpha * (\beta * \gamma) \circ f \simeq \alpha * (\beta * \gamma) \circ id_{[0,1]} = \alpha * (\beta * \gamma).$$

(b) Sei

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dann gilt $\varepsilon_{\alpha(0)} * \alpha = \alpha \circ f$, und wie bei (a) folgt $\varepsilon_{\alpha(0)} * \alpha \simeq \alpha$.

Die zweite Aussage funktioniert ganz analog.

(c) Sei

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad , \quad t \mapsto f(t) = \begin{cases} 2t & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2t & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dann gilt $\alpha * \alpha^{-1} = \alpha \circ f$. Aus $f \simeq c_0$ folgt $\alpha * \alpha^{-1} \simeq \alpha \circ c_0 = \varepsilon_{\alpha(0)}$.

Analog für $\alpha^{-1} * \alpha \simeq \varepsilon_{\alpha(1)}$. □

Bevor wir endlich zur Fundamentalgruppe kommen, führen wir noch ein paar nützlich Sprechweisen ein.

Definition 6.16:

Ein Paar (X, x_0) aus einem topologischen Raum X und einem Punkt $x_0 \in X$ heißt **punktierter topologischer Raum** (oder **Raum mit Basispunkt** x_0).

Ein Weg $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ heißt **Schleife** an x_0 .

Nun können wir das bisher Gelernte zu einer Gruppe zusammenfügen:

Satz 6.17:

Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Dann ist

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\alpha] \mid \alpha \text{ Schleife an } x_0\}$$

eine Gruppe bezüglich der Multiplikation

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta].$$

Beweis:

Schönerweise haben wir das schon bewiesen:

Die Multiplikation ist wohldefiniert nach Lemma 6.13. Die Gruppenaxiome gelten nach Bemerkung 6.15. □

Diese Gruppe ist so wichtig, dass sie einen eigenen Namen verdient hat. Dreimal dürft Ihr raten, welchen...

Definition 6.18:

$\pi_1(X, x_0)$ heißt die **Fundamentalgruppe** von X bezüglich x_0 .

Beachte: Wesentlich ist auch der Begriff des **Fundamentalgruppoids**, das Gruppoid *aller* Wege in X bis auf Homotopie (nicht nur Schleifen an den gleichen Punkt). Es wird mit $\Pi_1(X)$ bezeichnet.

$\pi_1(X, x_0)$ ist die Isotropiegruppe von x_0 im Gruppoid $\Pi_1(X)$.

Der Satz von Seifert van Kampen z.B. lässt sich für das Fundamentalgruppoid viel einfacher formulieren und beweisen als für die Fundamentalgruppe. In dieser Vorlesung werden wir aber nur mit der Fundamentalgruppe arbeiten, das Gruppoid kann ab sofort wieder vergessen werden.

Bemerkung 6.19:

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Dann ist die Abbildung

$$\gamma_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1) \quad , \quad [\alpha] \mapsto [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$$

wohldefiniert und ein Gruppenisomorphismus.

Beweis:

Die Wohldefiniertheit folgt aus Lemma 6.13 und Bemerkung 6.15 (a) (das Wegprodukt ist jeweils zulässig).

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\#}([\alpha] * [\alpha']) &= \gamma_{\#}([\alpha * \alpha']) \\
 &= [\gamma^{-1} * \alpha * \alpha' * \gamma] \\
 &= [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1} * \alpha' * \gamma] \\
 &= [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] * [\gamma^{-1} * \alpha' * \gamma] \\
 &= \gamma_{\#}([\alpha]) * \gamma_{\#}([\alpha']),
 \end{aligned}$$

also ist $\gamma_{\#}$ ein Gruppenhomomorphismus.

$(\gamma^{-1})_{\#}$ ist das Inverse von $\gamma_{\#}$ (nachrechnen), also ist $\gamma_{\#}$ sogar ein Isomorphismus. $\square$

Diese Bemerkung ist ganz wesentlich. Mit ihr haben wir nicht nur Homomorphismen zwischen Fundamentalgruppen gefunden. Vielmehr gewinnen wir durch sie sehr angenehme Freiheiten für wegzusammenhängende Räume: Für die Gruppenstruktur kommt es nicht darauf an, was x_0 ist! Denn die Fundamentalgruppen von (X, x_0) und (X, x_1) sind isomorph. Diese wichtige Erkenntnis formulieren wir nochmal ein wenig anders:

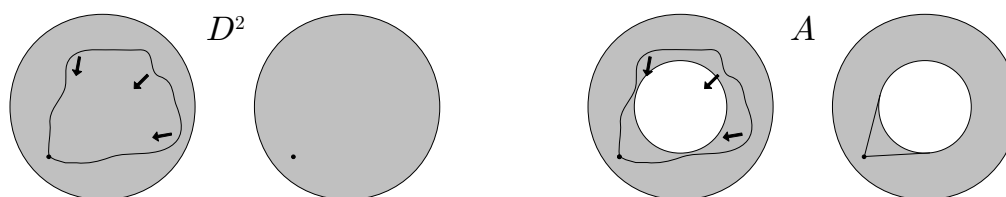
Korollar 6.20:

Sei X wegzusammenhängend. Dann ist der Isomorphietyp von $\pi_1(X, x_0)$ nicht von der Wahl von x_0 abhängig.

Beachte: Also nochmal: Wenn X wegzusammenhängend ist, ist es für die Fundamentalgruppe unerheblich, welchen Punkt wir als x_0 auszeichnen - die Gruppe sieht im Wesentlichen (d.h. bis auf Isomorphie) immer gleich aus. Dies rechtfertigt die Schreibweise $\pi_1(X)$ (statt $\pi_1(X, x_0)$) für „die“ Fundamentalgruppe von X , natürlich vorausgesetzt, X ist wegzusammenhängend.

Ganz zu Beginn dieses Kapitels hatten wir festgestellt, dass wir formal bisher nicht in der Lage sind, „Löcher“ in topologischen Räumen zu entdecken. Dieses Problem können wir nun mithilfe von Wegen und deren Homotopie-klassen lösen.

Betrachten wir zur Entwicklung des Konzepts nochmal unser Eingangsbeispiel D^2 vs A . Stellt Euch vor, wir werfen ein „Lasso“ um das Loch im Ring und ziehen es zusammen soweit es geht (natürlich hinkt die Metapher etwas, denn wie sollte jemand ein Loch mit einem Lasso fangen...).



Das Lasso um das Loch können wir nicht vollständig zusammenziehen, ohne durch das Loch hindurchzumüssen (d.h. den Raum A zu verlassen). Dagegen haben wir damit im D^2 keine Probleme: Hier können wir jedes Lasso vollständig zu uns zurückziehen.

Im mathematischen Sinn begreifen wir das Lasso im Raum X einfach als Weg, genauer sogar als Schleife γ an einen Punkt $x_0 \in X$ (das sind wir), und das Zusammenziehen als stetiges Deformieren von γ zur konstanten Schleife ε_{x_0} . Damit wir das sinnvoll tun können, muss X natürlich wegzusammenhängend sein.

Im D^2 ist damit jede Schleife homotop zur konstanten Schleife, also nullhomotop. Damit liegen aber alle Schleifen in einer einzigen Homotopieklasse (der von ε_{x_0}), oder anders ausgedrückt: die Fundamentalgruppe hat nur ein Element (nämlich ihr Neutrales $1 = [\varepsilon_{x_0}]$).

Im Ring A hingegen gibt es Schleifen, die nicht nullhomotop sind (z.B. die eingezeichnete um das Loch), andere sind es (z.B. die konstante Schleife selbst). Hier hat also die Fundamentalgruppe mehr als nur ein Element - und damit haben wir ein Unterscheidungskriterium gefunden! In folgender Definition fassen wir das nochmal als allgemeines Konzept zusammen und erfinden noch einen Namen dafür:

Definition 6.21:

Ein topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn

- (a) X wegzusammenhängend ist und
- (b) $\pi_1(X) = \{1\}$ gilt.

Wie kann man leicht entscheiden, ob ein Raum einfach zusammenhängend ist, ohne sich immer mit der Fundamentalgruppe herumschlagen zu müssen? Folgende Bemerkung gibt eine Antwort auf diese Frage.

Bemerkung 6.22:

Sei X wegzusammenhängend. Dann sind folgende Aussagen *äquivalent*:

- (a) X ist einfach zusammenhängend.
- (b) Für alle stetigen Abbildungen $f : S^1 \rightarrow X$ gilt: f ist nullhomotop.
- (c) Für alle stetigen Abbildungen $f : S^1 \rightarrow X$ existiert eine stetige Fortsetzung zu $F : D^2 \rightarrow X$.

Beweis:

Wir führen keinen klassischen Ringschluss, sondern zeigen zunächst die Äquivalenz von (a) und (b):

(a) $\Rightarrow$ (b) Wenn X einfach zusammenhängend ist, gilt $\pi_1(X) = \{1\}$. Sei $f : S^1 \rightarrow X$ eine Abbildung. f definiert einen geschlossenen Weg

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow X, \quad t \mapsto \alpha(t) = f(e^{2\pi i t}).$$

Da $\pi_1(X) = \{1\}$, ist α nullhomotop, also ist auch f nullhomotop.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sei $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ ein geschlossener Weg, d.h. $\alpha(0) = \alpha(1)$. Dann ist die Abbildung

$$f : S^1 \rightarrow X, \quad z \mapsto \alpha\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right)$$

stetig. Dann ist f nullhomotop, also ist auch α nullhomotop, und damit $[\alpha] = 1$.

Bemerkung 6.10 besagt (b) $\Leftrightarrow$ (c). □

Beispiel 35:

Wenn X kontrahierbar ist, dann ist jede stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow X$ nullhomotop und X ist wegzusammenhängend nach Bemerkung 6.9 (b). Also ist X dann einfach zusammenhängend.

Insbesondere sind $X = \mathbb{R}^n, D^n$ einfach zusammenhängend, da sie sternförmig sind (siehe Beispiel 30).

6.3. Der induzierte Homomorphismus

Mit der Fundamentalgruppe haben wir nun zum ersten mal die Kategorie der topologischen Räume mit der der Gruppen „verknüpft“. Allerdings haben wir bis jetzt nur einander entsprechende Objekte in Verbindung gebracht: ein topologischer Raum X , genauer ein punktierter topologischer Raum (X, x_0) , und seine Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$. Was uns noch fehlt, sind Entsprechungen in den Morphismen: stetigen Abbildungen auf der topologischen Seite und Gruppenhomomorphismen auf der Gruppenseite.

Folgende Definition zeigt, wie man zu einer gegebenen stetigen Abbildung zwischen punktierten topologischen

Räumen einen Homomorphismus ihrer Fundamentalgruppen finden kann.

Definition 6.23:

Seien (X, x_0) , (Y, y_0) punktierte topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0$. Dann heißt

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad , \quad [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$$

der **induzierte Homomorphismus**

Wenn wir diese Abbildung schon großspurig „induzierten Homomorphismus“ nennen, sollten wir aber schon nochmal sorgfältig zwei Dinge überprüfen: Erstens, ob unsere Definition überhaupt Sinn macht (d.h. ob f_* wohldefiniert ist), und zweitens, ob f_* auch tatsächlich ein Homomorphismus ist. Wie folgende Bemerkung zeigt, brauchen wir uns aber über den Geisteszustand des Namensgebers keine Sorgen zu machen:

Bemerkung 6.24:

Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, dann gelten:

- (a) f_* ist wohldefiniert.
- (b) f_* ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis:

Zugegebenermaßen müssen wir uns über die Wohldefiniertheit keine Gedanken mehr machen - die liefert uns schon Bemerkung 6.4.

Für Teil (b) seien $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ Schleifen an x_0 . Dann gilt

$$\begin{aligned} f \circ (\alpha * \beta) &= (f \circ \alpha) * (f \circ \beta) \\ \implies f_*([\alpha * \beta]) &= [f \circ (\alpha * \beta)] \\ &= [f \circ \alpha] * [f \circ \beta] \\ &= f_*([\alpha]) * f_*([\beta]) \end{aligned}$$

□

Nachdem das jetzt ja nicht so die große Überraschung war, wollen wir schnell noch eine weitere, auch nicht wirklich unerwartete Aussage hinterherschieben. Was aber natürlich nichts daran ändert, dass diese Aussage wichtig und irgendwo auch angenehm ist!

Bemerkung 6.25:

Seien (X, x_0) , (Y, y_0) , (Z, z_0) punktierte topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetig mit $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = z_0$. Dann ist

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Beweis:

Für alle $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ gilt:

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*([\alpha]) &= [(g \circ f) \circ \alpha] \\ &= [g \circ (f \circ \alpha)] \\ &= g_*([f \circ \alpha]) \\ &= g_*(f_*([\alpha])). \end{aligned}$$

□

Jetzt ist unser Bestreben, topologische mit Gruppenstruktur zu verknüpfen, vollendet. Anders ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathcal{Top}^\bullet &\rightarrow \text{Gruppen}, \\ (X, x_0) &\mapsto \pi_1(X, x_0), \\ f &\mapsto f_* \end{aligned}$$

ist ein *kovarianter Funktor* von der Kategorie der punktierten topologischen Räume $\mathcal{Top}^\bullet$ in die der Gruppen (die dabei übrigens nicht notwendigerweise abel'sch sein müssen).

Was haben wir nun dadurch gewonnen? Unser allgemeines Ziel ist es ja, topologische Invarianten aufzuspüren, um topologische Räume unterscheiden zu können, die nicht homöomorph sind. Mit der Fundamentalgruppe haben wir ein neues, mächtiges Werkzeug hierfür entwickelt, wie folgender Satz zeigt:

Satz 6.26:

Seien $(X, x_0), (Y, y_0)$ punktierte topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$ (wir schreiben auch: $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$) ein Homöomorphismus. Dann ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ein Gruppenisomorphismus. Insbesondere ist der Isomorphietyp der Fundamentalgruppe eine topologische Invariante für wegzusammenhängende Räume.

Beweis:

f ist ein Homöomorphismus, d.h. f ist bijektiv und f^{-1} ist stetig. Damit folgt mit Bemerkung 6.25

$$\begin{aligned} f_* \circ (f^{-1})_* &= (f \circ f^{-1})_* \\ &= (id_Y)_* \\ &= id_{\pi_1(Y, y_0)}. \end{aligned}$$

Analog verfährt man mit $(f^{-1})_* \circ f_*$ und erhält so die Behauptung. □

Das bedeutet: Wenn wir es nicht schaffen, zwei topologische Räume mit „rein topologischen“ Untersuchungen zu unterscheiden, können wir zusätzlich noch die Fundamentalgruppen betrachten und versuchen, diese mit algebraischen Methoden voneinander abzugrenzen. Damit beginnt eigentlich erst jetzt wirklich die algebraische Topologie.

Nun kommen wir zu einer sehr wichtigen Aussage, dem Fixpunktsatz von Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Und wie sich das für sehr wichtige Aussagen gehört, werden wir sie an dieser Stelle auch nicht vollständig beweisen... Aber halb so schlimm, hier erstmal der Satz:

Satz 6.27 (Brouwer'scher Fixpunktsatz):

Sei $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel und $f : D^n \rightarrow D^n$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h.

$$\exists x \in D^n \quad \text{mit} \quad f(x) = x.$$

Beweis:

Mit unserem bisherigen Kenntnisstand sind wir leider nur in der Lage, den Satz für $n \leq 2$ zu zeigen. Der allgemeine Fall ist für uns noch außer Reichweite - für $n > 2$ bräuchten wir Homologie.

$n = 1$: In diesem Fall gilt $D^n = D = [0, 1]$. Sei also $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig.

Definiere

$$g : \underbrace{[0, 1]}_{=: I} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g(x) := f(x) - x.$$

g ist damit stetig, $g(0) \geq 0$ und $g(1) \leq 0$.

Da $g(I)$ zusammenhängend ist, muss $g(I)$ ein Intervall sein. Dann existiert aber ein $x \in I$ mit $g(x) = 0 \implies f(x) = x$.

Falls Euch das bekannt vorkam - das war auch einfach der Zwischenwertsatz.

$n = 2$: Angenommen, f hat keinen Fixpunkt. Definiere $g : D^2 \rightarrow S^1 = \partial D^2$ durch „ $g(x) :=$ Schnittpunkt des Strahls von $f(x)$ nach x mit S^1 “. Dann ist g (obwohl wir hier keine Formel angegeben haben) wohldefiniert und stetig. Mit $i : S^1 \rightarrow D^2$ bezeichnen wir die Einbettung von S^1 in D^2 .

Bezüglich des Basispunktes $x_0 = (1, 0)$ induziert die Komposition $S^1 \xrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{g} S^1$ eine Komposition von Gruppenhomomorphismen (siehe Bemerkung 6.25)

$$\pi_1(S^1, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2, x_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(S^1, x_0).$$

Da $g \circ i = id_{S^1}$ ist, folgt $g_* \circ i_* = id_{\pi_1(S^1, x_0)}$, d.h. g_* ist surjektiv. Aber D^2 ist einfach zusammenhängend nach Beispiel 101, also ist

$$\pi_1(D^2, x_0) = \{1\} \Rightarrow \pi_1(S^1, x_0) = \{1\},$$

was ein Widerspruch ist zu $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z} \not\cong \{1\}$ (wie wir in Kapitel 7 beweisen werden und jetzt schon ahnen). $\square$

6.4. Homotopieäquivalenz der Fundamentalgruppe

Satz 6.28:

Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$, $f, g : X \rightarrow Y$ stetig und homotop mit Homotopie $H : f \simeq g$. Bezeichne mit $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y, t \mapsto H(x_0, t)$ den durch H definierten Weg von $f(x_0)$ nach $g(x_0)$. Dann gilt:

$$\gamma_{\#} \circ f_* = g_*.$$

Zur Erinnerung: $\gamma_{\#} : [\alpha] \mapsto [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$ ist ein Isomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen eines topologischen Raums mit verschiedenen Basispunkten, die durch γ verbunden werden können (siehe Bemerkung 6.19).

Dieser Satz besagt, anders ausgedrückt, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(X, x_0) & \\ f_* \swarrow & & \searrow g_* \\ \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{\gamma_{\#}} & \pi_1(Y, g(x_0)) \end{array}$$

Beweis:

Nach Bemerkung 6.19 ist

$$\gamma_{\#} : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, g(x_0))$$

ein Gruppenisomorphismus. Sei nun β eine Schleife an x_0 . Dann ist

$$f_*([\beta]) = [f \circ \beta]$$

und

$$\gamma_{\#}(f_*([\beta])) = [\gamma^{-1} * (f \circ \beta) * \gamma]$$

und

$$g_*([\beta]) = [g \circ \beta].$$

Zu zeigen ist also:

$$\gamma^{-1} * (f \circ \beta) * \gamma \simeq g \circ \beta.$$

Definiere die Abbildung

$$G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y, G(s, t) := H(\beta(s), t).$$

Dann ist G stetig und somit eine Homotopie zwischen $H(\beta(s), 0) = f(\beta(s))$ und $H(\beta(s), 1) = g(\beta(s))$. Das heißt $G : f \circ \beta \simeq g \circ \beta$.

Dann liefert

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y, \quad (s, t) \mapsto \begin{cases} \gamma(1 - 4s) & , \quad 0 \leq s \leq \frac{1-t}{4} \\ G\left(\frac{4s+t-1}{3t+1}\right) & , \quad \frac{1-t}{4} \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ \gamma(2s - 1) & , \quad \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen $\gamma^{-1} * (\beta \circ \gamma) * \gamma$ und $g \circ \beta$. □

Folgendes Korollar verallgemeinert Satz 6.26.

Korollar 6.29:

Sei $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Homotopieäquivalenz (d.h. eine Homotopieäquivalenz mit $f(x_0) = y_0$). Dann ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ein Gruppenisomorphismus.

In Worten besagt diese Folgerung: homotope wegzusammenhängende Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen.

Beweis:

Sei f eine Homotopieäquivalenz. Dann gibt es $g : Y \rightarrow X$ stetig mit $G \circ f \simeq id_X$ und $f \circ g \simeq id_Y$. Mit Satz 6.28 folgt die Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(X, x_0) & \\ f_* \swarrow & & \searrow g_* \\ \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{\gamma_\#} & \pi_1(Y, g(x_0)) \end{array}$$

Also ist $(g \circ f)_*$ ein Isomorphismus. Mit Bemerkung 6.25 folgt, dass $g_* \circ f_*$ ein Isomorphismus ist, also ist g_* surjektiv und f_* injektiv.

Analog erhält man, dass auch $(f \circ g)_*$ ein Isomorphismus ist, und in der Folge ist damit f_* surjektiv und g_* injektiv. □

Dieses Kapitel schließen wir damit ab, S^n für größere n auf einfachen Zusammenhang zu untersuchen - nachdem S^1 ja unser Paradebeispiel für einen *nicht* einfach zusammenhängenden Raum war.

Beispiel 36:

S^n ist einfach zusammenhängend für $n \geq 2$.

Beweis:

Seien $x, y \in S^n$, $x \neq y$ (z.B. Nord- und Südpol), außerdem $U := S^n \setminus \{x\}$, $V := S^n \setminus \{y\}$. Dann sind $U, V \approx \mathbb{R}^n$ mittels stereographischer Projektion (siehe Beispiel 20) und somit einfach zusammenhängend (Beispiel 35 und Satz 6.26).

Weiter ist $U \cap V = S^n \setminus \{x, y\} \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend, da $n \geq 2$ ist. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^n$ eine Schleife an x_0 . Ohne Einschränkungen können wir annehmen, dass $x_0 \in U \cap V$ ist. Da γ stetig ist, gibt es für alle $t \in [0, 1]$ ein $\varepsilon_t > 0$ mit $B(t, \varepsilon_t) :=]t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t[\subseteq \underbrace{\gamma^{-1}(U)}_{=\gamma^{-1}(\{x\})^C}$ oder $B(t, \varepsilon_t) \subseteq \underbrace{\gamma^{-1}(V)}_{=\gamma^{-1}(\{y\})^C}$.

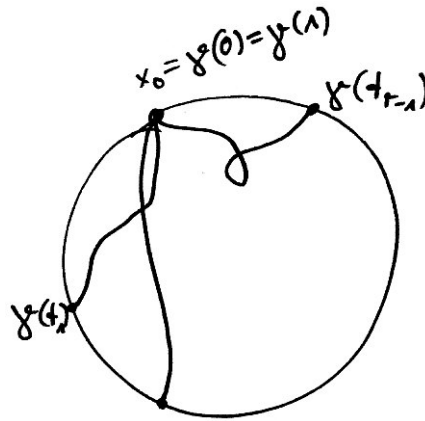
Da $[0, 1]$ kompakt ist, kann $[0, 1]$ mit endlich vielen solchen Intervallen überdeckt werden:

$$0 = t_0 \quad \left[\begin{array}{ccccccc} & (t_1) & (t_2) & (t_3) & \dots & & \end{array} \right] \\ \quad \quad \quad t_0 \quad \quad t_1 \quad \quad t_2 \quad \quad t_3 \quad \dots \quad t_r = 1$$

Daher gibt es Zahlen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ mit der Eigenschaft, dass $\gamma([t_{k-1}, t_k])$ ganz in U oder ganz in V liegt.

Sei γ_k der Weg $\gamma_k(s) := \gamma(st_k + (1-s)t_{k-1})$ ($k = 1, \dots, r$) von $\gamma(t_{k-1})$ nach $\gamma(t_k)$ längs γ . Dann gilt $\gamma \simeq \gamma_1 * \dots * \gamma_r$. Sei l_k ($k = 1, \dots, r-1$) ein Weg von x_0 nach $\gamma(t_k)$ mit

- l_k liegt in U , falls $\gamma(t_k) \in U$,
 - l_k liegt in V , falls $\gamma(t_k) \in V$.
- (und somit in beiden, falls $\gamma(t_k) \in U \cap V$)



Dies ist möglich, da U, V bzw. $U \cap V$ wegzusammenhängend sind. Dann folgt

$$\begin{aligned} [\gamma] &= [\gamma_1 * \dots * \gamma_r] \\ &= [(\gamma_1 * l_1^{-1}) * (l_1 * \gamma_2 * l_2^{-1}) * \dots * (l_{r-1} * \gamma_r)]. \end{aligned}$$

Aber $\gamma_1 * l_1^{-1}$, $l_1 * \gamma_2 * l_2^{-1}$, $\dots$, $l_{r-1} * \gamma_r$ sind Schleifen, die jeweils ganz in U oder ganz in V liegen. Da U und V einfach zusammenhängend sind, sind diese alle homotop zur trivialen Schleife. Dann ist aber natürlich auch γ homotop zur trivialen Schleife! $\square$

7. Überlagerungen

7.1. Überlagerungsabbildungen

Definition 7.1:

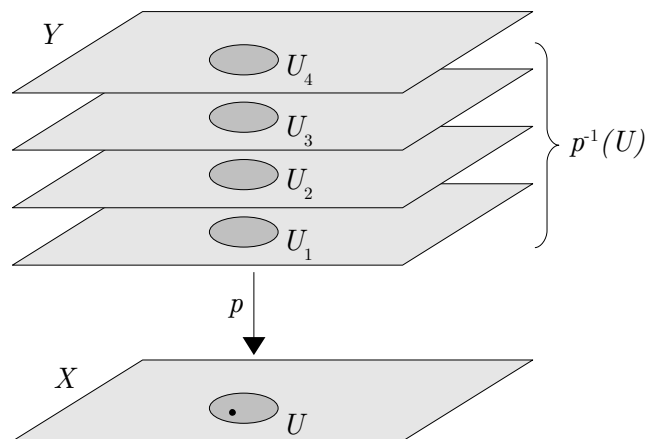
Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $p : Y \rightarrow X$ heißt **Überlagerung** von X , falls es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt, sodass $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$, wobei U_i offen und $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist für alle $i \in I$, d.h.

$$p^{-1}(U) \approx U \times I.$$

Dabei ist I eine Indexmenge mit diskreter Topologie.

Solch ein U nennt man **trivialisierende** offene Menge der Überlagerung.

Die Bedeutung dieser etwas unübersichtlichen Definition zu durchschauen, ist nicht ganz einfach. Folgendes Schema verschafft (hoffentlich) ein wenig Übersicht.



Das Bild zeigt die Verhältnisse für einen Raum X (einer Ebene), der mittels p von einem Raum Y aus vier Ebenen überlagert wird. I ist hier die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ (mit diskreter Topologie). Das $p^{-1}(U)$ besteht aus der disjunkten Vereinigung von „Kopien“ von U , genauer aus Mengen $U_i \subseteq Y$ ($i \in I$), die zu U homöomorph sind. Der Homöomorphismus ist gerade p , jeweils eingeschränkt auf U_i .

Lasst Euch nicht von der ungewohnten Richtung $Y \rightarrow X$ der Überlagerungsabbildung verwirren. X ist der „ursprüngliche“ Raum, der überlagert wird.

Bevor wir uns Beispiele ansehen, geben wir noch einige einfache Eigenschaften von Überlagerungen an.

Bemerkung 7.2:

Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann gilt:

- (a) p ist surjektiv.
- (b) für alle $x \in X$ ist $p^{-1}(x)$ diskret in Y . $p^{-1}(x)$ heißt die **Faser über x** .
- (c) p ist ein lokaler Homöomorphismus, d.h. für alle $y \in Y$ gibt es $V \subseteq Y$ offen, $y \in V$, sodass $p : V \rightarrow p(V)$ ein Homöomorphismus ist.
- (d) p ist offen.
- (e) Ist X zusammenhängend, so ist $|p^{-1}(x)|$ konstant, d.h. unabhängig von $x \in X$.
 $|p^{-1}(x)|$ heißt dann die **Blätterzahl** der Überlagerung.

Beweis:

(a), (b) und (c) folgen direkt aus der Definition. (e) bleibt zur Übung unbewiesen, wir zeigen also nur (d):

Sei $V \subseteq Y$ offen. Dann folgt mit (c), dass für alle $y \in V$ ein offenes $V_y \subseteq V$ existiert, $y \in V_y$, sodass

$$p(V_y) \stackrel{p}{\approx} V_y$$

Dann ist $p(V_y)$ offen, da V_y offen ist. Daraus folgt: $p(V) = p\left(\bigcup_{y \in V} V_y\right) = \bigcup_{y \in V} p(V_y)$ ist offen. □

Beispiel 37: (a) Sei X ein topologischer Raum, Z diskret. Dann ist $p : X \times Z \rightarrow X, (x, z) \mapsto x$ eine Überlagerung, und zwar eine sogenannte **triviale Überlagerung**.

- (b) $\mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ ist eine ∞ -blättrige Überlagerung von S^1 .
- (c) $p : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto z^n$ ($n \geq 1$) ist eine Überlagerung mit n Blättern.

Überlagerungen treten in natürlicher Weise bei der Untersuchung mehrwertiger Umkehrfunktionen auf - z.B. die Funktion $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto z^n$ aus Beispiel 37, welche historisch von Riemann betrachtet wurde.

7.2. Das Liftungsproblem**Definition 7.3:**

Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg.

Ein Weg $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow Y$ heißt **Lift** von f , wenn $p \circ \tilde{f} = f$.

Eine Frage, die wir uns stellen könnten, ist, ob es zu jeder Überlagerung und jedem Weg eine Lift gibt. Eine weitere wäre: Ist der Lift in irgendeiner Form eindeutig? Beide Fragen beantwortet der folgende Satz:

Satz 7.4 (Liftungssatz für Wege):

Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg an $x_0 := f(0)$. Dann existiert zu jedem $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ **genau ein Lift** von f an y_0 .

Beweis:

Sei $t \in [0, 1]$ und V_t eine trivialisierende offene Umgebung von $f(t)$. Da f stetig ist, existiert ein $\varepsilon_t > 0$ mit $f(B_{\varepsilon_t}(t)) \subseteq V_t$. Natürlich wird $[0, 1]$ von den $B_{\varepsilon_t}(t)$ überdeckt: $[0, 1] = \bigcup_{t \in [0, 1]} B_{\varepsilon_t}(t)$. Da $[0, 1]$ kompakt ist, überdecken bereits endlich viele $B_{\varepsilon_t}(t)$ dieses Intervall. Sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ mit $f([t_i, t_{i+1}]) \subseteq V_i$, wobei V_i trivialisierende offene Mengen sind. Nun konstruiere einen Lift $\tilde{f}$ stückweise auf jedem Intervall $[t_i, t_{i+1}]$:

$$p^{-1}(V_0) = \bigcup_{i \in I_0} U_i.$$

Da $p(y_0) = x_0 \in V_0$ ist, existiert *genau* ein i_0 mit $y_0 \in U_{i_0}$. Nenne diese Menge $U_0 := U_{i_0}$. Dann ist $p|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ ein Homöomorphismus per Definition. Setze

$$\tilde{f}(t) := p|_{U_0}^{-1}(f(t)) \text{ für } t \in [0, t_1].$$

Setze $y_1 = \tilde{f}(t_1)$, dann ist $p(y_1) = p(\tilde{f}(t_1)) = f(t_1) \in V_1$, und per Induktion erhalten wir auf diese Weise eine stetig Funktion $f : [0, 1] \rightarrow Y$ mit $p \circ f = f$, also einen Lift von f .

An jeder Stelle t_i ist die Fortsetzung von $\tilde{f}$ auf $[t_i, t_{i+1}]$ durch $\tilde{f}(t_i)$ eindeutig festgelegt, d.h. $\tilde{f}$ ist eindeutig. $\square$

Die Homotopieversion dieses Satzes ist ebenfalls wahr:

Satz 7.5 (Liftungssatz für Homotopien):

Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ stetig mit $H(0, t) = x_0$, $H(1, t) = x_1$ für alle $t \in [0, 1]$.

Setze $H_t : [0, 1] \rightarrow X$, $H_t(s) = H(s, t)$ für $t \in [0, 1]$ (d.h. H_t sind Wege in X von x_0 nach x_1 und H ist die Homotopie zwischen H_0 und H_1). Seien $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = x_0$, $\tilde{H}_t : [0, 1] \rightarrow Y$ der Lift von H_t an y_0 gemäß Satz 7.4.

Dann ist die Abbildung $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$, $\tilde{H}(s, t) = \tilde{H}_t(s)$ stetig. Insbesondere ist $\tilde{H} : \tilde{H}_0 \simeq \tilde{H}_1$.

Der Beweis ist etwas länglich, aber in unserer Reichweite.

Korollar 7.6 (Monodromie-Lemma):

Unter den Voraussetzungen von Satz 7.5 haben alle Wege $\tilde{H}_t$ den gleichen Endpunkt y_1 .

Beweis:

$\tilde{H}_t$ liefert H_t : $p \circ \tilde{H}_t = H_t$ für alle $t \implies p \circ \tilde{H} = H \implies \tilde{H}(1, t) \in p^{-1}(\{x_1\})$, denn $H(1, t) = x_1$. Nach Bemerkung 7.2 (b) ist $p^{-1}(\{x_0\})$ diskret, aber $t \mapsto \tilde{H}(1, t)$ ist stetig, also konstant (nach Satz 2.2). $\square$

Eine weitere Folgerung ist diese:

Korollar 7.7:

Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $y_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$. Dann ist der induzierte Homomorphismus $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ injektiv.

Diese Aussage liefert die eine Richtung einer Galois-Korrespondenz zwischen den zusammenhängenden Überlagerungen vom (zusammenhängenden) X und Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$. Doch zunächst sollten wir die Aussage beweisen:

Beweis:

p_* ist ein Gruppenhomomorphismus nach Bemerkung 6.21. Jetzt bestimmen wir $\text{Ker}(p_*)$.

Sei $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow Y$ ein Element des Kerns von p_* , d.h. eine Schleife in Y an y_0 mit $p_*([\tilde{f}]) = 1 \in \pi_1(X, x_0)$, also $p \circ \tilde{f} \simeq \varepsilon_{x_0}$. Sei H eine Homotopie von $\varepsilon_{x_0} = H_0$ nach $p \circ \tilde{f} = H_1$ und $\tilde{H}$ wie in Satz 7.5 (und 7.6) die geliftete Homotopie zum Anfangspunkt y_0 ($\tilde{H} : \tilde{H}_0 \simeq \tilde{H}_1$).

$\tilde{H}_0$ ist ein Lift von ε_{x_0} zum Anfangspunkt y_0 , und ε_{y_0} ist ebenfalls ein solcher Lift. Daraus folgt mit der Eindeutigkeit aus Satz 7.4, dass $\tilde{H}_0 = \varepsilon_{y_0}$ ist. Ebenfalls gilt: $p \circ \tilde{f} = H_1$, $\tilde{f}(1) = y_0$, also sind $\tilde{f}$ und $\tilde{H}_1$ jeweils Lift von H_1 an y_0 , also $\tilde{f} = \tilde{H}_1$.

Damit gilt aber $\tilde{f} \simeq \varepsilon_{y_0}$, also ist $[\tilde{f}] = 1$, also besteht $\text{Ker}(p_*)$ nur aus dem neutralen Element, also ist p_* injektiv. $\square$

Und noch eine Folgerung:

Korollar 7.8:

Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $y_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$. Seien f eine Schleife an x_0 und $\tilde{f}$ der Lift zum Anfangspunkt y_0 . Dann gilt:

$$\tilde{f} \text{ ist eine Schleife} \iff [f] \in p_*(\pi_1(Y, y_0))$$

Beweis: „ $\Rightarrow$ “ Sei also $\tilde{f}$ eine Schleife. Dann ist $[\tilde{f}] \in \pi_1(Y, y_0)$, und daraus folgt:

$$[f] = [p \circ \tilde{f}] = p_*([\tilde{f}]) \in p_*(\pi_1(Y, y_0))$$

„ $\Leftarrow$ “ Sei $\tilde{h}$ eine Schleife an y_0 mit

$$[f] = p_*([\tilde{h}]) = [p \circ \tilde{h}],$$

also sind f und $p \circ \tilde{h}$ homotop, etwa durch $H : f \simeq p \circ \tilde{h}$. Sei $\tilde{H}$ der Lift mit $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$, $\tilde{H}_1 = \tilde{h}$. Dann ist nach 7.6

$$\tilde{H}_1(1) = \tilde{h}(1) = y_0 = \tilde{H}_0(1) = \tilde{f}(1),$$

also ist $\tilde{f}$ eine Schleife. □

7.3. Universelle Überlagerungen

Um die andere Richtung der Galois-Korrespondenz zu beschreiben, brauchen wir die universelle Überlagerung.

Definition 7.9:

Ein topologischer Raum X heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn jede Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung von x enthält.

Anders ausgedrückt: X heißt lokal wegzusammenhängend, wenn es eine Basis aus wegzusammenhängenden Mengen gibt.

Beachte: Aus „wegzusammenhängend“ folgt *nicht* „lokal wegzusammenhängend“! Zum Beispiel ist der Kamm wegzusammenhängend, aber *nicht* lokal wegzusammenhängend:



Lokaler Wegzusammenhang überträgt sich auf Überlagerungen:

Bemerkung 7.10:

Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und X lokal wegzusammenhängend. Dann ist auch Y lokal wegzusammenhängend.

Beweis:

Das ist klar: Betrachte die trivialisierenden offenen Mengen. □

Überlagerungen mit besonders schönen „Zusammenhangseigenschaften“ verdienen eine besondere Bezeichnung:

Definition 7.11:

Sei X ein topologischer Raum. Eine Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ heißt **universelle Überlagerung**, falls Y wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend ist (d.h. $\pi_1(Y) = \{1\}$).

Betrachten wir ein einfaches Beispiel einer universellen Überlagerung:

Beispiel 38:

Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist eine Überlagerung von S^1 . $\mathbb{R}$ ist wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend nach Beispiel 35. Also ist dies die universelle Überlagerung.

Nun lernen wir noch eine weitere Zusammenhangseigenschaft kennen.

Definition 7.12:

Ein topologischer Raum X heißt **semi-lokal einfach zusammenhängend**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ besitzt, sodass jede Schleife in U an x_0 in X homotop zur trivialen Schleife ist.

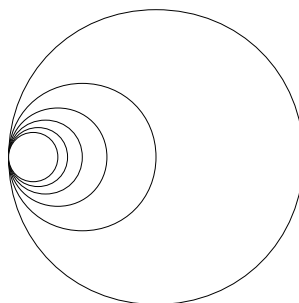
Ein topologischer Raum X heißt **lokal einfach zusammenhängend**, wenn für alle $x \in X$ gilt: jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ enthält eine einfach zusammenhängende Umgebung von x . Anders ausgedrückt: X heißt lokal einfach zusammenhängend, wenn eine Basis aus einfach zusammenhängenden Mengen existiert.

Beachte: Der Unterschied zwischen lokal einfach zusammenhängend und „nur“ *semi-lokal* einfach zusammenhängend ist klein, aber fein: für das schwächere „semi-lokal“ muss bloß eine einfach zusammenhängende Umgebung existieren. Das stärkere „lokal“ verlangt mehr, nämlich dass aus jeder Umgebung eine einfach zusammenhängende „Teilumgebung“ ausgewählt werden kann. Durch das folgende Beispiel sollten diese Beziehungen etwas klarer werden.

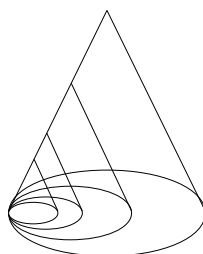
Beispiel 39: (a) Es gilt: X einfach zusammenhängend $\implies X$ semi-lokal einfach zusammenhängend. Dies ist leicht einzusehen, denn X ist eine zusammenhängende Umgebung für jeden seiner Punkte $x \in X$.

(b) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist semi-lokal einfach zusammenhängend, S^1 ebenso.

(c) Der Hawaiianische Ohrring $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ mit $K_n = \partial B_{\frac{1}{n}}((\frac{1}{n}, 0)) \subseteq \mathbb{R}^2$ ist *nicht* semi-lokal einfach zusammenhängend (das Problem ist natürlich der Punkt $(0,0)$).



(d) Der Kegel ist zwar nach (a) semi-lokal einfach zusammenhängend (da zusammenziehbar), aber *nicht* lokal einfach zusammenhängend.



(e) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ ist *nicht* semi-lokal einfach zusammenhängend. $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2)$ ist überabzählbar.

Was hat uns diese komische Eigenschaft „semi-lokal einfach zusammenhängend“ jetzt gebracht? Tatsächlich hilft sie uns in vielen relevanten Fällen zu entscheiden, ob ein topologischer Raum eine universelle Überlagerung hat.

Satz 7.13 (Existenz der universellen Überlagerung):

Sei X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfach zusammenhängend. Dann besitzt X eine universelle Überlagerung. Diese ist bis auf Homöomorphie eindeutig.

Beweis:

Der Beweis ist relativ langwierig, weil viele Sachen zu erledigen sind, nämlich:

- Wir müssen eine Überlagerung konstruieren, von der wir behaupten, sie wäre die universelle Überlagerung. Hierzu benötigen wir einen topologischen Raum $\tilde{X}$ und eine Überlagerungsabbildung p .
- Für $\tilde{X}$ müssen wir eine passende Topologie definieren.
- Wir müssen zeigen, dass p wirklich eine Überlagerungsabbildung ist (hierfür werden wir zunächst zeigen, dass p stetig und offen ist).
- Wir müssen überprüfen, ob $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

Beim Nachvollziehen des Beweises ist es aufgrund seiner Länge wichtig, den Überblick zu behalten, d.h. jederzeit zu wissen, warum wir was gerade beweisen.

Vorher wollen wir aber nochmal an unsere Vereinbarung erinnern, die natürlich auch für diesen Beweis gelten soll: Wenn wir Homotopieklassen von Wegen betrachten, so meinen wir stets Homotopieklassen mit *gleichem Anfangs- und Endpunkt*.

Schritt 1 Konstruktion

Sei $x_0 \in X$ beliebig, aber fest. Definiere

$$\begin{aligned} \tilde{X} &:= \{[f] \mid f \text{ Weg in } X \text{ an } x_0\}, \\ p: \tilde{X} &\rightarrow X, \quad [f] \mapsto f(1) \text{ (Endpunkt)}. \end{aligned}$$

p ist wohldefiniert, da alle Wege in $[f]$ per Definition denselben Endpunkt haben (siehe Vereinbarung). Zudem ist p surjektiv, da X wegzusammenhängend ist und somit jeder Punkt Endpunkt eines Weges.

Nun versehen wir $\tilde{X}$ mit einer Topologie:

Schritt 2 Topologie auf $\tilde{X}$

Wir werden nicht explizit eine Topologie angeben, sondern uns Satz 1.8 zunutze machen: Durch Angabe eines Umgebungssystems, welches gewisse Bedingungen erfüllt (siehe Bemerkung 1.7) ist eine Topologie eindeutig bestimmt.

Sei $\tilde{x} = [f] \in \tilde{X}$ und U eine Umgebung von $p(\tilde{x})$ in X (d.h. eine Umgebung des Endpunktes von f). Definiere

$$V(\tilde{x}, U) := \{[f * u] \mid u \text{ Weg in } U \text{ mit } u(0) = f(1)\}.$$

Ist $u = \varepsilon_{f(1)}$ der konstante Weg, so ist $[f * u] = [f] = \tilde{x}$, also $\tilde{x} \in V(\tilde{x}, U)$.

Ist auch U' eine Umgebung von $p(\tilde{x}) = f(1)$, so gilt

$$V(\tilde{x}, U) \cap V(\tilde{x}, U') \supseteq V(\tilde{x}, U \cap U'),$$

da jeder Weg in $U \cap U'$ sowohl in U als auch in U' liegt. Sei nun $U \subseteq X$ offen, $\tilde{x}' = [f'] \in V(\tilde{x}, U)$, dann folgt per Definition, dass es eine Abbildung $u: [0, 1] \rightarrow U$ gibt mit $[f'] = [f * u]$ und U ist eine Umgebung von $u(1) = p(\tilde{x}')$. Ist weiter v ein Weg in U an $u(1)$, so gilt $[f' * v] = [f * u * v] \in V(\tilde{x}, U)$, also $V(\tilde{x}', U) \subseteq V(\tilde{x}, U)$ für alle $\tilde{x}' \in V(\tilde{x}, U)$.

Vertauscht man die Rollen von $\tilde{x}$ und $\tilde{x}'$, so erhält man die umgekehrte Inklusion, und damit insgesamt

$$V(\tilde{x}', U) = V(\tilde{x}, U). \quad (*)$$

Aus $V(\tilde{x}, U) \cap V(\tilde{x}, U') \supseteq V(\tilde{x}, U \cap U')$ und $(*)$ folgt, dass das System der Obermengen der $V(\tilde{x}, U)$ die Bedingungen (a) bis (d) aus Bemerkung 1.7 erfüllt. Mit 1.8 erhalten wir also ein Umgebungssystem einer (eindeutigen) Topologie $\mathcal{T}$ auf $\tilde{X}$.

Bemerkung: Diese Konstruktion liefert eine Topologie auf der Fundamentalgruppe $\pi_1(X) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X\}$, wobei $[\gamma] = \{\gamma' : [0, 1] \rightarrow X \mid \gamma'(0) = \gamma(0), \gamma'(1) = \gamma(1) \text{ und } \gamma \simeq \gamma'\}$. Damit gibt es zwei Abbildungen $s, t : \pi_1(X) \rightarrow \tilde{X}$ mit $s([\gamma]) = \gamma(0)$, $t([\gamma]) = \gamma(1)$. $\tilde{X}$ ist dann nichts anderes als $\tilde{X} = t^{-1}(\{x_1\}) \subseteq \pi_1(X)$, oder auch $\tilde{X} = s^{-1}(\{x_0\}) \subseteq \pi_1(X)$. Insbesondere ist die universelle Überlagerung eine Faser von $\pi_1(X)$!

Schritt 3 p ist stetig

Es gilt

$$\begin{aligned} p(V(\tilde{x}, U)) &= \{p([f * u]) \mid u \text{ Weg in } U \text{ mit } u(0) = f(1)\} \\ &= \{u(1) \mid u \text{ Weg in } U \text{ mit } u(0) = f(1)\} \subseteq U. \end{aligned}$$

Ist U wegzusammenhängend, so ist $p(V(\tilde{x}, U)) = U$.

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &= \{[f] \mid f \text{ Weg in } X \text{ an } x_0, f(1) \in U\} \\ &= \bigcup_{g(1) \in U, g(0) = x_0} V([g], U). \end{aligned}$$

Nach $(*)$ sind die $V(\tilde{x}, U)$ offen in X , da sie Umgebung aller ihrer Punkte sind. Damit ist aber auch obige Vereinigung offen, also auch $p^{-1}(U)$. Somit ist p stetig.

Schritt 4 p ist offen

Da jedes $V \in \mathcal{T}$ Vereinigung gewisser $V(\tilde{x}, U)$ mit offenem U ist, ist $p(V)$ die Vereinigung dieser zugehörigen U . Damit ist p offen.

Schritt 5 p ist Überlagerungsabbildung

Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Sei weiter $U \subseteq X$ offen mit

- $p(\tilde{x}) \in U$,
- jede Schleife in U ist homotop in X (!) zur trivialen Schleife ($\exists$ nach Voraussetzung an X).

Seien u, v Wege in U von $p(\tilde{x})$ nach $u(1) = v(1)$. Dann ist $[u * v^{-1}] = [\varepsilon_{p(\tilde{x})}]$ nach Voraussetzung an U . Damit folgt

$$[f * u] = [f * u * u^{-1} * v] = [f * v],$$

also hängt $[f * u]$ nur von $u(1)$ ab. Damit hat jedes $u(1) \in U$ genau ein Urbild in $V(\tilde{x}, U)$.

Da p stetig und offen ist, ist $p|_{V(\tilde{x}, U)} : V(\tilde{x}, U) \rightarrow U$ ein Homöomorphismus (**).

Sind weiter $\tilde{x} \neq \tilde{x}' \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = p(\tilde{x}')$, so gilt

$$V(\tilde{x}, U) \cap V(\tilde{x}', U) = \emptyset.$$

Denn wäre $\tilde{y} \in V(\tilde{x}, U) \cap V(\tilde{x}', U)$, so würde wegen $(*)$ gelten $V(\tilde{y}, U) = V(\tilde{x}, U) = V(\tilde{x}', U)$ im Widerspruch zu (**).

Insgesamt ist p also eine Überlagerungsabbildung.

Schritt 6 $\tilde{X}$ ist wegzusammenhängend

Setze $\tilde{x}_0 := [\varepsilon_{x_0}] \in \tilde{X} \implies p(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0(1) = x_0$. Sei f ein Weg in X an x_0 . Nach Satz 7.4 gibt es genau einen Lift $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ von f an $\tilde{x}_0$.

Wir zeigen: $\tilde{f}(1) = [f]$. Daraus folgt dann bereits, dass $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist.

Für $f = \varepsilon_{x_0}$ ist $\varepsilon_{\tilde{x}_0}$ ein Lift mit Endpunkt $\tilde{x}_0 = [\varepsilon_{x_0}]$ und wir sind fertig.

Sei nun die Aussage richtig für einen Weg f und U eine wegzusammenhängende Umgebung von $f(1)$, die eine trivialisierende Umgebung ist. Ist u ein Weg in U mit $u(0) = f(1)$, so folgt mit (**), dass genau ein Weg $\tilde{u}$ in $V([f], U)$ liegt mit $\tilde{u}(0) = \tilde{f}(1)$, $p(\tilde{u}(1)) = u(1)$ (da über $u(1)$ genau ein Punkte von $V([f], U)$ liegt). Aber auch $[f * u]$ liegt über $u(1)$ in $V([f], U)$, also ist $\tilde{u} = [f * u]$. Aber $\tilde{f} * \tilde{u} = \widetilde{f * u}$ nach Satz 7.4, also ist $\tilde{f} * \tilde{u}(1) = \tilde{u}(1) = [f * u]$. Das heißt, die Aussage gilt auch für den „längeren“ Weg $f * u$.

Ist nun $f : [0, 1] \rightarrow X$ beliebig, so wird $[0, 1]$ als kompakte Menge bereits durch endlich viele Urbilder wegzusammenhängender trivialisierender U 's überdeckt. Per Induktion gilt die Aussage damit für f .

Damit ist $\tilde{X}$ wegzusammenhängend.

Schritt 7 $\tilde{X}$ ist lokal wegzusammenhängend

Das ist schönerweise geschenkt, da X lokal wegzusammenhängend ist und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ als Überlagerung diese Eigenschaft auf $\tilde{X}$ überträgt (Bemerkung 7.10).

Schritt 8 $\tilde{X}$ ist einfach zusammenhängend

Sei f eine Schleife in X an x_0 und $\tilde{f}$ deren Lift an $\tilde{x}_0$. Ist $\tilde{f}$ eine Schleife, so gilt $\tilde{x}_0 = \tilde{f}(1) = [f]$, also $[f] = [\varepsilon_{x_0}] = 1$ in $\pi_1(X, x_0)$. Mit Korollar 7.8 folgt daraus $p_* \left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \right) = 1$. Da p_* injektiv ist, folgt mit Korollar 7.7: $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$. $\square$

Folgende Bemerkung ermöglicht es uns, die Fundamentalgruppen von vielen Räumen direkt anzugeben. Ein Beispiel ist der Kreis S^1 – auch wenn das die Formulierung dieser Bemerkung nicht gerade nahelegt.

Bemerkung 7.14:

Sei X wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend und G eine Gruppe, die stetig, **frei** und **diskontinuierlich** auf X operiert, d.h. für alle $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x mit $U \cap gU = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{1\}$.

Dann ist die kanonische Abbildung $p : X \rightarrow X/G$ eine universelle Überlagerung und

$$\pi_1(X/G) \cong G.$$

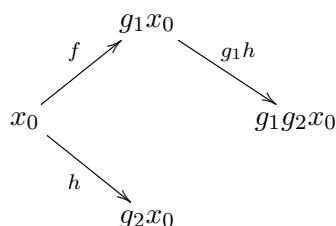
Beweis: • Dass $p : X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung ist, ist eine leichte Übung.

- Sei $x_0 \in X$ beliebig, aber fest und f ein Weg von x_0 nach $g(x_0)$. Definiere

$$\varphi : G \rightarrow \pi_1(X/G, p(x_0)) \quad , \quad g \mapsto [p \circ f].$$

φ ist wohldefiniert: $p \circ f$ geht von $p(x_0)$ nach $p(g(x_0)) = p(x_0)$, ist also eine Schleife. Da X einfach zusammenhängend ist, ist $[f]$ unabhängig vom gewählten f und φ ist wohldefiniert.

φ ist ein **Homomorphismus**: Seien $g_1, g_2 \in G$. Wir definieren folgende Wege:



Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \varphi(g_1 g_2) &= [p \circ (f * g_1 \circ h)] \\
 &= [(p \circ f) * \underbrace{(p \circ g_1 \circ h)}_{=p}] \\
 &= [p \circ f] * [p \circ h] \\
 &= \varphi(g_1) \varphi(g_2).
 \end{aligned}$$

φ ist **surjektiv**: Sei f eine Schleife an $p(x_0)$ in X/G . Wegen Satz 7.4 gibt es genau einen Lift $\tilde{f}$ von f an x_0 . Dafür ist

$$p(\tilde{f}(1)) = f(1) = p(x_0),$$

und nach Definition von p gibt es ein $g \in G$ mit $\tilde{f}(1) = gx_0 \implies \varphi(g) = [p \circ \tilde{f}] = [f]$.

φ ist **injektiv**: Sei $g \in G$ mit $\varphi(g) = [\varepsilon_{p(x_0)}]$. Sei f ein Weg von x_0 nach gx_0 , dann gilt $[p \circ f] = \varphi(g) = [\varepsilon_{p(x_0)}]$, also $[p \circ f] \in p_*(\pi_1(X, x_0))$. Nach 7.7 ist f also eine Schleife. Dann gilt aber $x_0 = gx_0$, also $g = 1$ nach Voraussetzung. $\square$

Dieses Skript werden wir wie versprochen damit abschließen, die Fundamentalgruppe von S^1 und vom Torus $S^1 \times S^1$ anzugeben.

Korollar 7.15:

Es gilt:

- (a) $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$
- (b) $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Beweis:

Wir benutzen Bemerkung 7.14:

- (a) $\mathbb{Z}$ operiert stetig, frei und diskontinuierlich auf $\mathbb{R}$ vermöge $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (z, x) \mapsto z + x$. Dadurch wird

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx [0,1]/\{0,1\} \approx S^1.$$

Mit Bemerkung 7.14 folgt damit

$$\pi_1(S^1) = \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

- (b) Genau dasselbe Spiel, bloß mit komponentenweiser Operation

$$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, ((z_1, z_2), (x_1, x_2)) \mapsto (z_1 + x_1, z_2 + x_2).$$

Damit erhält man $\pi_1(S^1 \times S^1) = \pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \cong \mathbb{Z}^2$. $\square$

Insbesondere ist S^1 *nicht homotop* (und damit auch *nicht homöomorph*) zu $\mathbb{R}$ und auch *nicht homotop* zum Torus!

Literatur

- [1] Murray Eisenberg. *Topology*. Holt, Rinehart and Winston, New York u.a., 1. edition, 1974.
- [2] Klaus Jänich. *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin u.a., 7. edition, 2001.
- [3] Seymour Lipschutz. *Theory and Problems of General Topology*. McGraw-Hill, New York u.a., 1. edition, 1965.
- [4] Sidney A. Morris. *Topology without Tears*. 2010.

Ich empfehle insbesondere das Buch von Eisenberg (behandelt vorwiegend mengentheoretische Topologie).