Fachbereich Mathematik
Sommersemester 2012

Mohamed Barakat
Simon Hampe

6. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Topologie“

Abgabetermin: Mittwoch, 11. Juli, 11:00

Aufgabe 1. Beweise Bemerkung 6.1.3.(e).

Aufgabe 2. Sei G ein wegzusammenhängender topologischer Raum mit einer stetigen Abbildung (Multiplikation genannt) $\mu : G \times G \to G$, so daß ein Element $1 \in G$ existiert mit $\mu(1, x) = \mu(x, 1) = x$ für alle $x \in G$. Beweise:

(1) Für Schleifen α, β an 1 gilt $[\alpha] * [\beta] = [\mu \circ (\alpha, \beta)]$ mit $\mu \circ (\alpha, \beta) : [0, 1] \to G,\ s \mapsto \mu(\alpha(s), \beta(s))$.

(2) $\pi_1(G, 1)$ ist eine Abelsche Gruppe.

Insbesondere sind Fundamentalgruppen von topologischen Gruppen immer Abelsch.

Aufgabe 3. Ein topologischer Raum X heißt **semi-lokal einfach zusammenhängend** falls jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ besitzt, so daß jede Schleife in U an x_0 homotop *in* X zur trivialen Schleife ist. Klar: X einfach zusammenhängend $\implies$ X semi-lokal einfach zusammenhängend. Zeige:

(1) $X = S^1$ und $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sind semi-lokal einfach zusammenhängend.

(2) Sei $X \simeq Y$. X semi-lokal einfach zusammenhängend $\implies$ Y semi-lokal einfach zusammenhängend. D.h. semi-lokal einfacher Zusammenhang ist eine Invariante des Homotopietyps. (Vgl. (1))

(3) Der **Hawaiianischer Ohrring** $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial B_{\frac{1}{n}}((\frac{1}{n}, 0)) \subset \mathbb{R}^2$ ist nicht semi-lokal einfach zusammenhängend.

Aufgabe 4. Beweise:

(1) Die Gruppe der speziell-unitären Matrizen $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) := \{U \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid U^{-1} = \overline{U}^{\mathrm{tr}} \text{ und } \det U = 1\} \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist homöomorph zu S^3.

(2) $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ ist einfach zusammenhängend.

Fortsetzung in der Zusatzaufgabe.

Zusatzaufgabe

(3) Konstruiere einen Epimorphismus $\pi : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ auf der speziell-orthogonalen Gruppe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) := \{O \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid O^{-1} = O^{\mathrm{tr}} \text{ und } \det O = 1\}$.

(4) Folgere aus Aufgabe 4, daß $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ die 2-blättrige universelle Überlagerung[1] von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ist.

(5) Zeige: $\mathrm{Kern}(\pi) \cong C_2$, die Gruppe mit 2 Elementen.

(6) Zeige: $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}P^3$ (dies zeigt, daß $\mathbb{R}P^3$ – im Gegensatz zu $\mathbb{R}P^2$ – orientiert ist).

(7) Zeige: $\pi_1(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}), 1) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^3, x_0) \cong C_2$, für einen (beliebigen aber festen) Punkt $x_0 \in \mathbb{R}P^3$.
Insbesondere ist die Fundamentalgruppe der Gruppe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ Abelsch, so wie es Aufgabe 2 vorhersagt.

Hinweis zu (3): Betrachte die (sogenannte adjungierte) Operation von $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ auf (ihrer Lie-Algebra)

$$\begin{aligned}\mathfrak{su}_2 &:= \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid \overline{A}^{\mathrm{tr}} = -A \text{ und } \mathrm{Spur}(A) = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ b-ic & -ia \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{R}^3,\end{aligned}$$

vermöge $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}),\ (U,A) \mapsto UAU^{-1}$. Beachte, daß die Determinante eine Invariante dieser Operation ist.
Hinweis zu (7): Braucht Stoff der 12. Vorlesung.

[1] Diese Überlagerung sorgt für das Auftauchen der Halbspin-Darstellungen (z.B. die Eichdarstellung des Elektrons) in der Quantenmechanik.