Fachbereich Mathematik
Sommersemester 2012

Mohamed Barakat
Simon Hampe

3. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Topologie“

Abgabetermin: Mittwoch, 30. Mai, 11:00

Aufgabe 1. Beweise folgende Form des Satzes von BOLZANO-WEIERSTRASS für kompakte topologische Räume:
Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann besitzt jede Folge in X einen Häufungspunkt, d.h. es existiert ein $x \in X$, so daß jede Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder enthält. „Verallgemeinere“ die Aussage auf unendliche Teilmengen von X.

Folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper und $X = k^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ausgestattet mit der ZARISKI-Topologie. Zeige: Der n-dimensionale affine Raum X ist quasi-kompakt. (Wann ist X kompakt?)
Hinweis: Der Ring $k[x_1, \ldots, x_n]$ ist nach dem HILBERTschen Basissatz NOETHERsch.

Aufgabe 3.

(1) Sei X ein lokal kompakter Raum. Beweise: Die Einpunktkompaktifizierung von X ist bis auf Homöormorphie eindeutig bestimmt.
(2) Beweise: $\mathbb{Q}$ (ausgestattet mit der natürlichen Topologie) besitzt keine Einpunktkompaktifizierung. Wie läßt sich diese Aussage verallgemeinern?
(3) Konstruiere eine n-Punkt Kompaktifzierung von $\mathbb{N}$ (ausgestattet mit der diskreten Topologie) für jede natürliche Zahl n. D.h. konstruiere eine Kompaktifzierung $\iota : X \hookrightarrow \overline{X}$ von X mit $|\overline{X} \setminus \iota(X)| = n$.

Aufgabe 4.

(1) Beweise: Die Kategorie $\mathcal{T}op$ der topologischen Räume (und stetigen Abbildungen) enthält beliebige **Produkte**. D.h.: Für jede Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ topologischer Räume existiert ein topologischer Raum X und stetige Abbildungen $\pi_i : X \to X_i$ ($\forall i \in I$), die folgender **universeller Eigenschaft** genügen: Gegeben ein topologischer Raum Y und stetige Abbildungen $p_i : Y \to X_i$ ($\forall i \in I$), so existiert eine *eindeutige* stetige Abbildung $p : Y \to X$ mit $\pi_i \circ p = p_i$ ($\forall i \in I$).
Hinweis: Die Eindeutigkeit von X folgt aus der universellen Eigenschaft.

(2) Beweise die **duale** Aussage (sie entsteht dadurch, daß man alle Abbildungspfeile umdreht): Die Kategorie $\mathcal{T}op$ enthält beliebige **Koprodukte** (auch **Summen** gennant). D.h.: Für jede Familie $\{X_i\}_{i\in I}$ topologischer Räume existiert ein topologischer Raum $X := \coprod_{i\in I} X_i$ und stetige Abbildungen $\iota_i : X_i \to X$ $(\forall i \in I)$, die folgender **universeller Eigenschaft** genügen: Gegeben ein topologischer Raum Y und stetige Abbildungen $\varepsilon_i : X_i \to Y$ $(\forall i \in I)$, so existiert eine *eindeutige* stetige Abbildung $\varepsilon : X \to Y$ mit $\varepsilon \circ \iota_i = \varepsilon_i$ $(\forall i \in I)$.