Ein mathematisches Modell für eine faire Stimmverteilung im Ministerrat der EU

Felix Boos

Vortrag im Rahmen der Vorlesung
"Grundlagen der Mathematik 2", SS 2010

Gliederung

Der Ministerrat

- Wichtigstes Entscheidungsorgan der EU
- Setzt sich zusammen aus je einem Vertreter aus jedem Mitgliedstaat:
- Der jeweils zuständige Fachminister: Umweltpolitische Fragen $\Rightarrow$ alle Umweltminister, ...

Die doppelte Mehrheit

Der Ende 2007 beschlossene Vertrag von Lissabon regelt die Abstimmungsmodalitäten im Rat (ab 2014).
Die meisten Entscheidungen werden mit **doppelter Mehrheit** getroffen.

- 55% der Mitgliedstaaten müssen zustimmen, die zusammen
- 65% der EU-Bürger repräsentieren müssen
- Eine Sperrminorität muss mind. 4 Mitglieder haben

Was ist Macht?

- Durch die Stimmenverteilung soll „Macht“ verteilt werden
- Macht eines Mitgliedes in einem Gremium ist die Möglichkeit des Mitglieds, durch Abgabe seiner Stimme die Entscheidung zu einer Frage verändern zu können
- Je öfter es genau auf die Stimme eines Mitglieds ankommt, desto größer ist dessen Macht.

Problematik

Von der Stimmenzahl kann man **nicht** (direkt) auf die Macht eines Wählers schließen

Beispiel: Aktiengesellschaft, bei der ein Aktionär 51% der Anteile besitzt

Er hat „nur“ 51% der Stimmen, aber 100% der Macht!

Gesucht: „Maßeinheit“ für Macht

Eine Lösung: der Machtindex nach Banzhaf

Der Banzhaf'sche Machtindex

Beeinflussbare Koalitionen

Eine von einem Mitglied x **beeinflussbare Koalition** K ist eine Koalition, die folgende drei Bedingungen erfüllt:

- x ist ein Mitglied von K
- K ist eine gewinnende Koalition
- Wenn x aus K entfernt wird, ist K keine gewinnende Koalition mehr

  D.h.: Ausgang der Wahl hängt von der Entscheidung von x ab.

Der Banzhaf'sche Machtindex
Definition

$K_b(x)$: Anzahl der von x beeinflussbaren Koalitionen,

$K_{ges}(x)$: Gesamtzahl an möglichen Koalitionen mit Beteiligung von x

Den Quotienten

$$\beta_x = \frac{K_b(x)}{K_{ges}(x)}$$

nennen wir den **Banzhaf-Index** von x.

β_x gibt an, welcher Anteil an allen denkbaren Koalitionen von x beeinflussbar ist.

Der Banzhaf'sche Machtindex

Beispiel

A: 3 Stimmen, B: 4 Stimmen, C: 5 Stimmen

Gewinnende Koalition braucht 8 Stimmen ($\frac{2}{3}$-Mehrheit)

A kann folgende Koalitionen bilden: A, AB, AC, $ABC \Rightarrow K_{ges}(A) = 4$

Gewinnende Koalitionen: AC und ABC

von A beeinflussbar: nur AC

$K_b(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta_A = \frac{1}{4}$

Der Banzhaf'sche Machtindex

Beispiel (Fortsetzung)

Analog erhält man $\beta_B = \frac{1}{4}$ und $\beta_C = \frac{3}{4}$

Bemerkungen

B hat mehr Stimmen als *A*, aber denselben Machtindex

C hat viel mehr Macht als man erwarten würde

Das Quadratwurzelgesetz
Grundlagen

Lionel Penrose, 1946: „The Elementary Statistics of Majority Voting“

Grundidee: Jeder EU-Bürger sollte durch seinen Staatsvertreter gleichermaßen im Rat repräsentiert sein

Fiktive Abstimmung in jedem Mitgliedstaat ⇒ Minister soll im Rat so stimmen, wie es die Mehrheit der Bevölkerung in seinem Land täte

Frage: Wie tragen wir Sorge dafür, dass eine Wählerstimme in einer solchen Abstimmung in Malta ebensoviel Wert ist wie in Deutschland?

Das Quadratwurzelgesetz

Grundlagen

Ein Bürger im Staat x habe bei der fiktiven Abstimmung den Machtindex $\widehat{\beta_x}$

Machtindex β_x des Staates im Ministerrat muss so gewählt werden, dass das Produkt

$$\widehat{\beta_x} \cdot \beta_x$$

für *alle Staaten x denselben Wert $c > 0$ annimmt*

Dies gilt genau für

$$\beta_x = \frac{1}{\widehat{\beta_x}} \cdot c$$

Das Quadratwurzelgesetz
Grundlagen

Also muss gelten:

$$\beta_x \overset{!}{\sim} \frac{1}{\widehat{\beta_x}}$$

Das Quadratwurzelgesetz
Die Macht des Bürgers

Wie groß ist $\widehat{\beta_x}$ in einem Land mit n Einwohnern?

Nach der Definition des Banzhaf-Indexes gilt

$$\widehat{\beta_x} = \frac{\widehat{K_b}(x)}{\widehat{K_{ges}}(x)}$$

(wobei $\widehat{K_b}(x)$ die Anzahl der von einem Bürger im Land x beeinflussbaren Koalitionen ist und $\widehat{K_{ges}}(x)$ die Gesamtzahl aller möglichen Koalitionen, die er bilden kann)

Vorgehen: Bestimme $\widehat{K_b}(x)$ und $\widehat{K_{ges}}(x)$!

Das Quadratwurzelgesetz

Die Macht des Bürgers

Jeder der n Einwohner: 2 Möglichkeiten („Ja“ oder „Nein“)

Der eine untersuchte Bürger ist schon festgelegt (gewinnende Koalition)

Die $n-1$ anderen Bürger haben dann insgesamt 2^{n-1} Möglichkeiten, Koalitionen zu bilden.

Also gilt:

$$\widehat{K_{ges}}(x) \quad = \quad 2^{n-1}$$

Das Quadratwurzelgesetz

Die Stirling'sche Formel

Stirling'sche Formel:
Für genügend große $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n! \quad \approx \quad \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Beweis: siehe z.B. Forster, Analysis 1

Das Quadratwurzelgesetz
Beeinflussbare Koalitionen

Fallunterscheidung:

- n ist ungerade $\Rightarrow$ $n - 1$ ist gerade.
  „Nicht betrachtete“ Bürger: zwei gleich große Lager. Genau dann bestimmt der übrige Bürger den Wahlausgang.
- n ist gerade $\Rightarrow$ $n - 1$ ist ungerade.
  „Nicht betrachteten“ Bürger: zwei Lager gespalten werden, wobei eines um 1 größer ist als das andere. Nur dann bestimmt der übrige Bürger den Wahlausgang.
- Ähnlicher Rechnung, gleiches Ergebnis $\Rightarrow$ betrachten hier nur ersten Fall: n ungerade

Das Quadratwurzelgesetz
Anzahl der Auswahlmöglichkeiten

Zwei gleich große „Lager“ (Koalitionen) gibt es dann, wenn von den $n-1$ Stimmen genau $\frac{1}{2}(n-1)$ für den Vorschlag sind und genauso viele dagegen.

Um von diesen $n-1$ Stimmen $\frac{1}{2}(n-1)$ auszuwählen, die dafür bzw. dagegen sind, gibt es

$$\widehat{K_b}(x) = \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-1)}$$

Möglichkeiten.

Das Quadratwurzelgesetz

Vereinfachung

Wir wollen diesen Term so umformen, dass wir besser damit rechnen können.

$$
\begin{aligned}
\widehat{K_b}(x) &= \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-1)} \\
&= \frac{(n-1)!}{\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2} \\
&\approx \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \cdot \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\left(\sqrt{2\pi \cdot \frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Das Quadratwurzelgesetz
Vereinfachung

Das lässt sich vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\widehat{K_b}(x) &= \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}\cdot\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\pi\cdot(n-1)\cdot\left(\frac{n-1}{2e}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}}{\pi\cdot(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\cdot 2^{n-1}}{\sqrt{\pi(n-1)}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2^{n-1}}{\sqrt{n-1}}
\end{aligned}$$

Das Quadratwurzelgesetz
Zusammenfassung

Wir haben also berechnet:

- Gesamtkoalitionen

$$\widehat{K_{ges}}(x) = 2^{n-1}$$

  und
- beeinflussbare Koalitionen

$$\widehat{K_b}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{n-1}}{\sqrt{n-1}}$$

Das Quadratwurzelgesetz
Der Machtindex

Teilen wir $\widehat{K_b}(x)$ durch $\widehat{K_{ges}}(x)$, so erhalten wir den Banzhafindex

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta_x} &= \frac{\widehat{K_b}(x)}{\widehat{K_{ges}}(x)} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{n-1}}{\sqrt{n-1}}}{2^{n-1}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}}
\end{aligned}
$$

Das Quadratwurzelgesetz

Der Machtindex

Also gilt

$$\widehat{\beta_x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

Wegen der großen Werte für n (Einwohnerzahl!) können wir $n - 1 \approx n$ setzen und erhalten

$$\begin{aligned} \widehat{\beta_x} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \widehat{\beta_x} &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Das Quadratwurzelgesetz

Daraus folgern wir:

$$\beta_x \sim \frac{1}{\widehat{\beta_x}} \sim \sqrt{n}$$

Das Quadratwurzelgesetz von Lionel Penrose:

Der Machtindex eines Landes muss proportional zur Quadratwurzel seiner Einwohnerzahl sein!

Das Quadratwurzelgesetz

Weitergehende Betrachtungen

Annahme bis jetzt: jeder EU-Bürger hat immer klare Meinung: „Ja“ oder „Nein“

Was, wenn einige zu bestimmten Themen keine Meinung haben?

Realität: wahrscheinlich Enthaltung bei Abstimmung

Berechne den Banzhaf-Index $\widehat{\beta_x}'$ eines EU-Bürgers im Staat x erneut mit *mit Enthaltungen*!

Das Quadratwurzelgesetz

Weitergehende Betrachtungen: Gesamtkoalitionen

Jeder Bürger hat dann nicht nur 2 Entschiedungsmöglichkeiten, sondern eine dritte (Enthaltung) kommt hinzu, also gilt

$$\widehat{K_{ges}}'(x) \quad = \quad 3^n$$

Bemerkung:
Es gilt nach dem binomischen Lehrsatz

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 1^i \cdot 2^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}$$

Das Quadratwurzelgesetz

Weitergehende Betrachtungen: Beeinflussbare Koalitionen

Wenn sich i Bürger enthalten, gibt es, da diese i nunmehr keinerlei Einfluss haben, genauso viele beeinflussbare Konstellationen wie bei $n - i$ Wählern ohne Enthaltung.

Dies sind $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}}$ Möglichkeiten.

Wir müssen noch berücksichtigen, dass es verschiedene Möglichkeiten dafür gibt, wer sich enthält: Bei i Enthaltungen und n Bürgern sind dies $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten.

Das Quadratwurzelgesetz

Beeinflussbare Koalitionen

Die Gesamtzahl an beeinflussbaren Koalitionen mit Enthaltungen ist also die Summe der beeinflussbaren Koalitionen bei $n, n-1, n-2, \ldots, 1, 0$ Bürgern (jeweils ohne Enthaltungen) und multipliziert mit der Zahl der Enthaltungsmöglichkeiten:

$$\widehat{K_b}'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}} \qquad + 1$$

Die „+1“ ist der Summand für $i = n$. Dieser Fall ist im Summenterm nicht definiert und muss also gesondert betrachtet werden. Da eine „+1“ bei Zahlen dieser Größenordnung jedoch fast keine Rolle spielt, wird er im Folgenden nicht mehr berücksichtigt.

Das Quadratwurzelgesetz
Weitergehende Betrachtungen

Damit gilt:

$$\widehat{\beta_x}' = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}}}{3^n}$$

Das Quadratwurzelgesetz

Der Machtindex

Dieser Term sollte nun vereinfacht werden. Dazu „spalten“ wir den Summenterm in zwei Teile:

$$\widehat{K_b}'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}}\right)$$

Der zweite Teil sollte konstant sein!

Das Quadratwurzelgesetz
Der Machtindex

Betrachten wir uns den ersten Teil $\binom{n}{i} \cdot 2^{n-i} = f_n(i)$ graphisch:

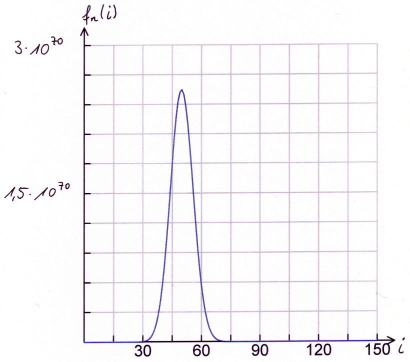


Abbildung: f_n für $n = 150$

Das Quadratwurzelgesetz
Der Machtindex

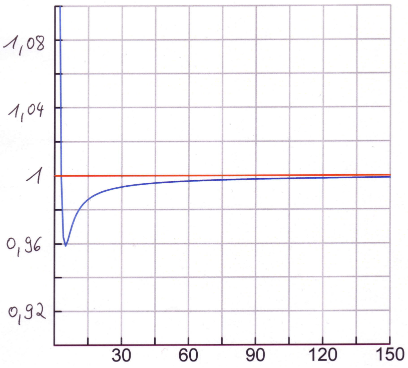
Für $i \approx \frac{n}{3}$ ist der erste Teil maximal. Setzen wir also $i = \frac{n}{3}$ in den zweiten Teil des Summenterms ein. Der entstehende Fehler dürfte nicht sehr groß sein, denn:

- Am Maximum ist der Fehler 0.
- Bei nahe am Maximum liegenden i ist der Fehler noch sehr klein.
- Bei Werten von i, die vom Maximum deutlich abweichen, ist der Fehler größer, fällt wegen der dort kleinen Funktionswerte von $f_n(i)$ aber nicht so stark ins Gewicht.
- Einige Fehler mitteln sich zusätzlich noch „raus“, da bei $i < \frac{n}{3}$ der Fehler positiv wird, bei $i > \frac{n}{3}$ negativ.
- Ein „echter“ mathematischer Beweis fehlt aber!

Das Quadratwurzelgesetz

Der Machtindex

Folgendes Diagramm zeigt das Verhältnis der Näherung $\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ zum exakten Term $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}}}{3^n}$ in Abhängigkeit von n.



Das Quadratwurzelgesetz

Der Machtindex

Wir setzen also $i = \frac{n}{3}$ im zweiten Teil des Summenterms ein und formen um:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta_x}' &= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}}}{3^n} \\
&\approx \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i_0}}}{3^n} \\
&\approx \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-\frac{n}{3}}}}{3^n}
\end{aligned}
$$

Das Quadratwurzelgesetz

Der Machtindex

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{3^n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}n}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}}{3^n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}n}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}}{3^n}$$

Das Quadratwurzelgesetz

Der Machtindex

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}n}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{3^n}{3^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}n}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

Das Quadratwurzelgesetz
Zusammenfassung

Wir erhalten mit

$$\begin{aligned} \widehat{\beta_x}' &= \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \Rightarrow \widehat{\beta_x}' &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \Rightarrow \beta_x' &\sim \sqrt{n} \end{aligned}$$

erneut das Quadratwurzelgesetz von Penrose!

Stimmverteilung
Problem

Das Quadratwurzelgesetz bezieht sich auf die Macht (d.h. den Banzhaf-Index). Es gibt uns noch keine konkrete „Anleitung“, um eine Stimmverteilung zu konstruieren.

Eine Möglichkeit, das Quadratwurzelgesetz in einer Stimmverteilung umzusetzen, haben die beiden polnischen Mathematiker Wojciech Słomczyński und Karol Życzkowski von der Jagiellonen-Universität in Krakau entwickelt, den sogenannten „Jagiellonischen Kompromiss“.

Stimmverteilung

Jagiellonischer Kompromiss

Prinzip:

Jeder Staat erhält ein Stimmgewicht proportional zur Quadratwurzel seiner Einwohnerzahl.

Durch die geschickte Wahl des Quorums stimmen dann Machtindex und Stimmgewicht (fast) überein.

Stimmverteilung
Optimales Quorum

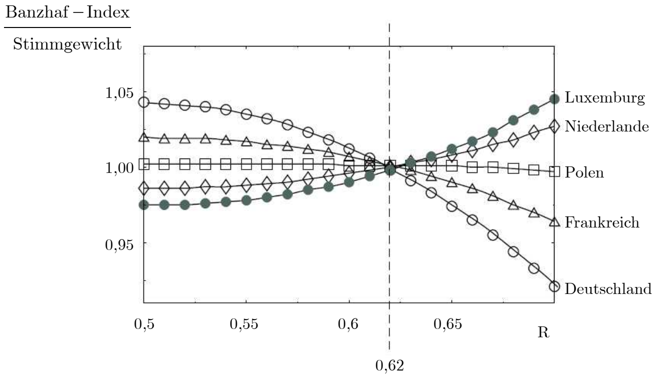


Abbildung: Verhältnis von Macht zu Stimmgewicht in Abhängigkeit vom Quorum *R*

Stimmverteilung

Optimales Quorum

Für 25 EU-Staaten ist das optimale Quorum 62% (also etwas unter einer $\frac{2}{3}$-Mehrheit).

Für 27 EU-Staaten ist das optimale Quorum 61,4%.

Je mehr Mitgliedstaaten, desto kleiner das optimale Quorum.

Stimmverteilung

Jagiellonsicher Kompromiss

Dies wäre also ein Vorschlag für eine Stimmverteilung im Ministerrat:

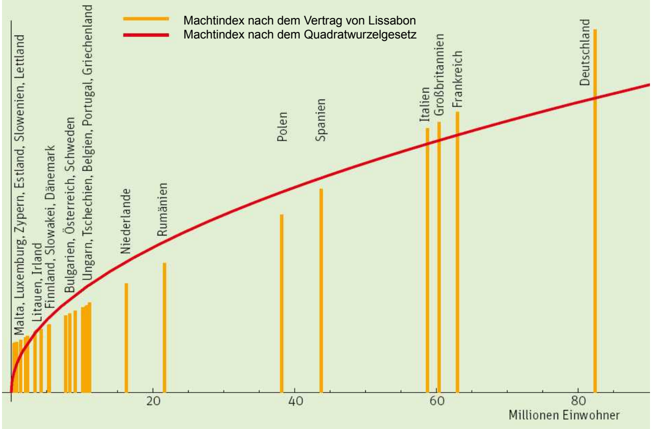
> Jeder Staat erhält ein Stimmgewicht proportional zur Quadratwurzel seiner Einwohnerzahl.
>
> Das Quorum beträgt 61,4%.

Stimmverteilung

Jagiellonischer Kompromiss: Vorteile

- Das System ist **einfach**: nur ein Kriterium, keine „doppelte Mehrheit" o.ä. wie bei Lissabon.
- Es ist **transparent**: von Stimmenverteilung kann direkt auf Machtverteilung geschlossen werden.
- Durch die Größenordnung des Quorums sind Entscheidungen zugleich **qualifiziert**, da deutlich mehr als 50% der Stimmen benötigt werden, und **effizient**, da das Quorum nicht so hoch ist, dass eine Beschlussfassung unrealistisch erscheint.
- Das System ist **erweiterbar**: Bei weiteren EU-Beitritten nur kleine Änderung am Quorum nötig.
  Die Quorumsverminderung trägt auch zur Effektivität bei: größere Zahl an Mitgliedern $\Rightarrow$ Mehrheitsfindung und damit Beschlussfassung erschwert.

Stimmverteilung
Lissabon im Vergleich



Ausblick

- Quadratwurzel ist optimales System auf Grundlage **dieses Modelles**
- Verbesserungen: Verfeinertes Modell
- Z.B.: Stimmabgabe der Bürger erfolt nicht unabhängig
- Weitere Faktoren außer Einwohnerzahl bedeutsam?

Zusammenfassung

- Aus der Stimmenanzahl kann nicht direkt auf die eigentliche „Macht“ geschlossen werden, diese kann man nur mit Machtindizes (z.B. Banzhaf) messen.
- Für eine faire gewichtete Stimmverteilung muss der Machtindex jedes Landes proportional zur Quadratwurzel seiner Einwohnerzahl sein.
- Nicht nur die Stimmzahlen bestimmen den Machtindex, sondern auch das Quorum.
- Jagiellonischer Kompromiss: Stimmgewichte mit Quadratwurzelsystem, Quorum abhängig von der Zahl der Mitglieder, aktuell ungefähr 61,4%.
- Im Vertrag von Lissabon kommen große und kleine Staaten zu gut weg, mittlere zu schlecht.

Noch Fragen ...?

Stimmverteilung

Warum Lissabon?

„Zunächst freue ich mich darüber, dass sie für ihre Facharbeit ein EU-Thema gewählt haben, sowie über ihre kritische Fragestellung.

Mir persönlich sind die Studien, auf die sie sich beziehen, nicht bekannt, und ich kann daher nicht dazu Stellung nehmen. Letztendlich sind solche Studien im Rahmen der Diskussion über Fragen wie die Stimmenverteilung im Rat zwar sicherlich interessant, aber nicht entscheidend. Die Regelung der Stimmenverteilung im Rat ist ja letztendlich eine ganz grundlegende politische Frage, über die daher ein politischer Kompromiss gefunden werden muss. Und es liegt geradezu im Wesen solcher Kompromisse, dass sie sich oft einer rationalen wissenschaftlichen Begründung entziehen. Die von Ihnen angesprochenen komplizierten Zusatzregelungen, die auf Betreiben Polens im letzten Moment in den Vertrag aufgenommen wurden, sind ein gutes Beispiel dafür - sie waren der politische Preis für eine Einigung.“