TU Kaiserslautern

Vortragsausarbeitung zur Zusatzveranstaltung zu den Grundlagen der Mathematik 2, SS 2010

Ein mathematisches Modell für eine faire Stimmenverteilung im Ministerrat der EU

Felix Boos

11. Juni 2010

Abstract

Der Rat der Europäischen Union (Ministerrat) ist das wichtigste Entscheidungsgremium der EU. Jeder Mitgliedstaat wird durch einen Repräsentanten vertreten, wobei verschiedene Staaten durch das Abstimmungsverfahren unterschiedlich viel Einfluss auf die Beschlüsse des Rates haben. Die vorliegende Arbeit untersucht, wie man Stimmgewichte möglichst „fair“ an die Länder im Ministerrat verteilt.
Der Einfluss eines Mitglieds wird durch den Banzhaf'schen Machtindex angegeben. Dieser beschreibt den Anteil an möglichen Abstimmungskonstellationen, die der jeweilige Wähler durch seine Stimmabgabe beeinflussen kann. Für eine faires Abstimmungsverfahren muss das von L. Penrose erstmals aufgestellte Quadratwurzelgesetz gelten. Es besagt, dass der Banzhafindex eines Landes proportional zur Wurzel seiner Einwohnerzahl sein muss. Diese Gesetzmäßigkeit ist das Ergebnis von Untersuchungen zur Repräsentation der EU-Bürger durch ihren Staatsvertreter im Rat. Den Betrachtungen liegt eine fiktive Volksabstimmung zugrunde, die einmal mit und einmal ohne Zulassung von Enthaltungen modelliert wird. Bei beiden Modellen ist das Ergebnis das Quadratwurzelgesetz.
Anschließend wird der „Jagiellonische Kompromiss“ dargestellt, ein Abstimmungssystem von W. Słomczyński und K. Życzkowski (Jagiellonen-Universität Krakau), das Penroses Forderung annähernd exakt erfüllt: Die Stimmen werden proportional zur Quadratwurzel der Bevölkerung verteilt, das Quorum ist von der Anzahl der Mitgliedstaaten abhängig und beträgt bei der aktuellen Zusammensetzung 61,4%.
Dieses Modell ist eine denkbare, wissenschaftlich begründete Möglichkeit. Beim Vergleich mit dem 2007 von den Staats- und Regierungschefs der EU-Mitglieder im Vertrag von Lissabon beschlossenen Verfahren fallen signifikante Abweichungen von den beschriebenen mathematischen Modellen auf: große und kleine Staaten sind dabei über-, mittlere unterrepräsentiert.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Der Rat der Europäischen Union (kurz „Ministerrat“ genannt) ist das wichtigste Entscheidungsgremium der EU. Er ist verantwortlich für die zu erlassenden Rechtsakte. Er beschließt gemeinsam mit dem Europäischen Parlament den EU-Haushalt. Ferner fällt er Entscheidungen beispielsweise in Außen- und Sicherheitspolitischen Fragen.
Der Rat setzt sich zusammen aus je einem Vertreter jedes Mitgliedstaates. Je nach zu verhandelndem Thema ist dies der zuständige Fachminister. Bei außenpolitischen Fragestellungen kommen also z.B. die Außenminister zusammen.

Die meisten Entscheidungen im Rat werden per Abstimmung getroffen. Dabei muss eine bestimmte *qualifizierte Mehrheit* erreicht werden[1]. Die Formalitäten hierfür regelt seit 2004 der Vertrag von Nizza, 2014 tritt das Verfahren in Kraft, welches 2007 im Vertrag von Lissabon beschlossen wurde.
Die qualifizierte Mehrheit wird nach der *doppelten Mehrheit* von Mitgliedstaaten und Bevölkerung berechnet: Eine doppelte Mehrheit ist dann erreicht, wenn 55% der Mitgliedstaaten zustimmen, die gemeinsam mindestens 65% der europäischen Bevölkerung vertreten.

Im Rahmen dieser Arbeit soll untersucht werden, wie ein Abstimmungsverfahren aussehen muss, um größtmögliche Fairness zu gewährleisten. Hierzu wird zuerst ein mathematisches Modell für die Messung von Macht eines Wählers bei einer Abstimmung entwickelt (Kapitel 2). Anschließend werden Bedingungen aufgestellt, die ein faires Abstimmungsverfahren erfüllen muss (Kapitel 3 und 4). Daraus wird dann ein solches Verfahren abgeleitet (Kapitel 5). Dieses wird anschließend gewürdigt und es wird ein Ausblick auf weiterführende Fragestellungen gegeben (Kapitel 6). Der Anhang enthält zusätzliches Datenmaterial, Angaben zur verwendeten Nomenklatur sowie das Literaturverzeichnis.

[1] Politisch besonders brisante Fragen wie z.B. das Asylrecht müssen einstimmig beschlossen werden

2. Machtindizes

2.1. Definition von Macht

In dieser Arbeit wollen wir untersuchen, wie man die Stimmgewichte im Ministerrat optimal verteilen kann. Mit den Stimmgewichten verteilt man „Macht“. Um Machtverteilung mathematisch analysieren zu können, brauchen wir eine „Maßeinheit“ für Macht. Dazu wurden verschiedene Modelle aufgestellt, von denen das geläufigste, der Banzhaf'sche Machtindex, im Folgenden genauer beschrieben werden soll. Dabei bedeutet Macht eines Mitgliedes in einem Gremium, dass das Mitglied durch Abgabe seiner Stimme(n) die Entscheidung des Gremiums zu einer Frage (z.B. Gesetzesvorlage etc.) verändern kann. Je öfter es genau auf die Stimme(n) eines Mitglieds ankommt, desto größer ist seine Macht.

2.2. Der Banzhaf'sche Machtindex

Nehmen wir an, dass in einem Gremium nur Fragen diskutiert werden, zu denen die Mitglieder jeweils „ja“ oder „nein“ (Zustimmung bzw. Ablehnung) sagen können. Dies entspricht im Normalfall der Entscheidungsfindung in den meisten politischen Gremien, auch im Ministerrat der EU[2]. Die Menge aller Wähler dieses Gremiums, die zu einer Frage mit derselben Meinung abstimmen, nennen wir *Koalition*. Für jede Abstimmung gibt es also zwei Koalitionen: Eine die dem Vorschlag zustimmt und eine, die ihn ablehnt. Eine *gewinnende Koalition* ist eine Koalition, deren Mitglieder zusammen genügend Stimmen haben, um die Abstimmung zu gewinnen. Eine von einem Mitglied x *beeinflussbare Koalition* K ist eine Koalition, die folgende drei Bedingungen erfüllt:

1. x ist ein Mitglied von K.
2. K ist eine gewinnende Koalition.
3. Wenn x aus K entfernt wird, ist K keine gewinnende Koaltion mehr.

Das heißt, dass der Ausgang der Wahl von der Entscheidung von x abhängt.

Definition Sei $K_b(x)$ die Anzahl der von x beeinflussbaren Koalitionen und K_{ges} die Gesamtzahl an möglichen Koalitionen, die in einem bestimmten Gremium mit Beteiligung von x gebildet werden können. Den Quotienten

$$\beta_x = \frac{K_b(x)}{K_{ges}(x)} \tag{2.1}$$

nennen wir den *Banzhaf-Index* von x in diesem Gremium. Er gibt an, welcher Anteil an allen denkbaren Koalitionen von x beeinflussbar ist.

Beispiel Ein Gremium habe die drei Mitglieder A, B und C mit den Stimmgewichten 3, 4 und 5. Damit eine Koalition gewinnend ist, brauche sie 8 Stimmen ($\frac{2}{3}$-Mehrheit). Betrachten wir Mitglied A. Es kann folgende Koalitionen bilden: A, AB, AC, ABC. $K_{ges}(A)$ ist also 4. Von diesen Koalitionen sind nur AC und ABC gewinnend. Von diesen wiederum ist nur AC von A beeinflussbar, also ist $K_b(A) = 1$ und damit $\beta_A = \frac{1}{4}$. Durch analoge Betrachtungen erhält man $\beta_B = \frac{1}{4}$ und $\beta_C = \frac{3}{4}$.

Bemerkung Obwohl B mehr Stimmen hat als A, haben beide denselben Machtindex. Und obwohl C nur das 1,25-fache der Stimmen von B hat, hat C dreimal soviel Macht. Es ist also nicht ohne weiteres möglich, von den Stimmgewichten auf den tatsächlichen Einfluss zu schließen.

[2] Was sich ändert, wenn man auch noch eine dritte Entscheidungsmöglichkeit, die der Enthaltung, zulässt, diskutieren wir in Kapitel 4. Die folgende Definition ist ohne weiteres auf diesen Fall übertragbar.

3. Das Quadratwurzelgesetz von Lionel Penrose

3.1. Ansatz

Die erste allgemein anerkannte mathematische Lösung des Stimmverteilungsproblems entwickelte 1946 Lionel Penrose [4]. Seine Argumentation baute darauf auf, dass jeder EU-Bürger den gleichen Einfluss auf die Entscheidungen im Europäischen Rat haben muss. Die Vetreter jedes Landes sollen im Idealfall so stimmen, wie die jeweilige Bevölkerung es täte. Wenn also eine Mehrheit im Land für den Vorschlag herrscht, so sollte der Repräsentant bei der Abstimmung auch für den Vorschlag votieren.
Den Einfluss eines Mitglieds bei einer Abstimmung (hier: eines Bürgers in einer Volksabstimmung) kann man, wie wir schon gesehen haben, mit dem Banzhaf'schen Machtindex angeben. Wir werden also den Index $\widehat{\beta_x}$ allgemein für einen Bürger eines Staates x mit n Einwohnern[3] bestimmen. Wenn jeder Mensch innerhalb der EU den gleichen Einfluss haben soll, muss für den Machtindex β_x des jeweiligen Landes gelten:

$$\beta_x \cdot \widehat{\beta_x} \quad = \quad c, \tag{3.1}$$

wobei $c > 0$ eine beliebige Proportionalitätskonstante ist, die für jedes Land x gleich ist. Wenn wir für β_x den Wert $c \cdot \frac{1}{\widehat{\beta_x}}$ wählen, ist (3.1) erfüllt. Wir fordern also:

$$\beta_x \quad \stackrel{!}{\sim} \quad \frac{1}{\widehat{\beta_x}} \tag{3.2}$$

Für eine Stimmenverteilung, die dieses Kriterium erfüllt, ist die Macht jedes EU-Bürgers wie gefordert *unabhängig* von der Einwohnerzahl seines Heimatlandes.

3.2. Die Macht des Bürgers: Konkrete Berechnung von $\widehat{\beta_x}$

Der Banzhaf'sche Machtindex $\widehat{\beta_x}$ ist, der Definition (2.1) folgend, das Verhältnis der Anzahl $\widehat{K_b}(x)$ der Konstellationen, die ein einzelner Bürger B durch seine Stimme beeinflussen kann und der Gesamtzahl $\widehat{K_{ges}}(x)$ aller denkbaren Konstellationen, die B enthält. Bei n Einwohnern gilt also:

$$\widehat{\beta_x} \quad = \quad \frac{\widehat{K_b}(x)}{\widehat{K_{ges}}(x)}. \tag{3.3}$$

3.2.1. Berechnung von $\widehat{K_{ges}}(x)$

Jeder Wähler hat zwei Möglichkeiten: Zustimmung und Ablehnung. Die Entscheidung des betrachteten Bürgers B ist jedoch schon festgelegt, da er bei jeder hier gezählten Koalition dabeisein muss (s.o.). Bei n Wählern ergibt dies

$$\widehat{K_{ges}}(x) \quad = \quad 2^{n-1} \tag{3.4}$$

mögliche Konstellationen.

[3] n ist natürlich von x abhängig, und es gibt mehrere verschiedene n, für jeden Staat eines. Korrekterweise müssten wir also $n(x)$ oder n_x schreiben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit bleiben wir jedoch bei n und setzen stillschweigend voraus, dass bei den Betrachtungen mit n jeweils nur die Einwohnerzahl eines bestimmten Staates x gemeint ist.

3.2.2. Berechnung von $\widehat{K_b}(x)$

Bei den folgenden Berechnungen nutzen wir u.a. folgende Approximation

Satz (Stirling'sche Formel für große Fakultäten):
Für genügend große $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n! \quad \approx \quad \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{3.5}$$

Den Beweis werden wir an dieser Stelle nicht führen. Er findet sich z.B. in Forster, Analysis 1 [1].

Ein Vorschlag gilt als angenommen, wenn bei einer Volksabstimmung mehr *Ja*- als *Nein*-Stimmen existieren (absolute Mehrheit). Hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden: n ist ungerade bzw. n ist gerade.

n ist ungerade Das bedeutet, dass $n-1$ gerade ist. B kann das Wahlergebnis nur dann durch seine Stimme „kippen", wenn alle anderen Wähler in zwei gleich große „Lager" gespalten sind. Dies ist dann der Fall, wenn von deren $n-1$ Stimmen genau $\frac{1}{2}(n-1)$ für den Vorschlag sind (und entsprechend genauso viele dagegen). Um aus einer $(n-1)$-elementigen Menge von Stimmen $\frac{1}{2}(n-1)$ Elemente auszuwählen, die dafür bzw. dagegen sind, gibt es

$$\begin{aligned}
\widehat{K_b}(x) &= \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-1)} \\
&= \frac{(n-1)!}{\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2} \\
&\overset{(3.5)}{\approx} \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \cdot \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\left(\sqrt{2\pi \cdot \frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \cdot \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\pi \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}}{\pi \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{\sqrt{2} \cdot 2^{n-1}}{\sqrt{\pi(n-1)}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{n-1}}{\sqrt{n-1}}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Möglichkeiten.

n ist gerade Die $n-1$ anderen Stimmen können nicht mehr in gleich viele Zustimmungen und Ablehnungen aufgeteilt werden, denn $n-1$ ist ja ungerade[4]. Das bedeutet, dass eine gewinnende Koalition (mit dem betrachteten Bürger) nicht mehr mit genau einer Stimme führen kann, sondern mindestens mit 2. Dies ist auch der einzige Fall, wenn eine solche Koalition durch B beeinflussbar ist. Wenn er aus der gewinnenden Koalition entfernt wird, hat diese eine Stimme weniger und die gegnerische Koalition eine Stimme mehr. Es herrscht also Gleichstand. Damit ist die erste Koalition keine gewinnende mehr, und sie war beeinflussbar von B.
B nicht mitgezählt hat diese beeinflussbare Koalition $\frac{n}{2}$ Mitglieder. Dafür gibt es $\binom{n-1}{\frac{n}{2}}$ Möglichkeiten.

[4] Daran kann man schon sehen, dass dann Gleichung (3.6) nicht mehr gelten kann, da in diesem Fall $\frac{1}{2}(n-1)$ keine natürliche Zahl ist

Es gilt also für ein gerades n:

$$
\begin{aligned}
\widehat{K_b}(x) &= \binom{n-1}{\frac{n}{2}} \\
&= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n}{2}-1\right)!} \\
&\overset{(3.5)}{\approx} \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \cdot \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{2\pi \cdot \left(\frac{n}{2}-1\right)} \cdot \left(\frac{\frac{n}{2}-1}{e}\right)^{\frac{n}{2}-1}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \cdot \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{2\pi \cdot \frac{n-2}{2}} \cdot \left(\frac{n-2}{2e}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \cdot \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\pi \cdot \sqrt{n(n-2)} \cdot \left(\frac{\sqrt{n(n-2)}}{2e}\right)^{n-2} \cdot \frac{n}{2e}}
\end{aligned}
$$

Für sehr große n gilt nun

$$
\sqrt{n(n-2)} \approx n-1. \tag{3.7}
$$

Da n ja Bevölkerungszahlen angibt, haben wir es mit sehr großen Zahlen zu tun. So ist der kleinste vorkommende Wert $n_{\text{Malta}} = 405.578$ (Stand Dezember 2006). Rechnet man (3.7) für diesen Wert mit 16stelliger Genauigkeit aus (z.B. mit MATLAB), so erhält man

$$
\sqrt{405.578 \cdot 405.576} \approx 405.576,999.998.767.2,
$$

was eine für uns ausreichende Genauigkeit sein sollte. Setzen wir also mit der Näherung (3.7) unsere Berechnung fort:

$$
\begin{aligned}
\widehat{K_b}(x) &= \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \cdot \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{\pi \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{n-2} \cdot \frac{n}{2e}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \cdot \frac{n-1}{e}}{\pi \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{n}{2e}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi(n-1)} \cdot \frac{n-1}{e} \cdot \frac{e}{n}}{\pi \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{n-1}{n}}{\sqrt{\pi \cdot (n-1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\frac{n-1}{n} \cdot 2^{n-1}}{\sqrt{(n-1)}} \\
&\approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{n-1}}{\sqrt{(n-1)}}
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Zu beachten ist, dass sowohl für gerades n nach (3.6) als auch für ungerades n nach (3.8) mit minimalem Fehler dasselbe Ergebnis für $\widehat{K_b}(x)$ herauskommt.

Wir können also abschließend festhalten:

$$
\widehat{K_b}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{n-1}}{\sqrt{(n-1)}}. \tag{3.9}
$$

3.2.3. Zusammenfassung zu $\widehat{\beta_x}$

Für $\widehat{\beta_x}$ gilt somit:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta_x} &= \frac{\widehat{K_b}(x)}{\widehat{K_{ges}}(x)} \\
&\overset{(3.4),(3.9)}{=} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{n-1}}{\sqrt{n-1}}}{2^{n-1}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Wegen der großen Werte für n können wir auch hier wieder eine Vereinfachung durchführen, ohne signifikante Verfälschungen zu verursachen:

$$\widehat{\beta_x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (3.11)$$

Da $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ konstant ist, gilt

$$\widehat{\beta_x} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad (3.12)$$

3.3. Zusammenfassung

Setzen wir (3.12) in (3.2) ein, erhalten wir nichts anderes als das Quadratwurzelgesetz von Penrose:

Satz (Penrose):
Der Machtindex eines Landes muss proportional zur Quadratwurzel seiner Einwohnerzahl sein!

$$\beta_x \overset{!}{\sim} \sqrt{n} \qquad (3.13)$$

Bemerkung (3.13) bezieht sich auf den *Machtindex* eines Landes x, *nicht* auf das Stimmgewicht! Durch dieses Quadratwurzelgesetz allein kann man noch nicht auf eine optimale Stimmenverteilung schließen.

4. Weitergehende Betrachtungen

Lionel Penroses Überlegungen basieren darauf, dass jeder Bürger die Möglichkeit hat, sich zwischen *Ja* und *Nein* (Zustimmung und Ablehnung) zu entscheiden. In der Realität wird dies aber nicht jeder tun. Verschiedene Themen sind nicht für jeden interessant, oder man kann sich nicht entschließen, ob man einen Vorschlag gut oder schlecht findet. In diesem Fall würde man sich bei einer Abstimmung wahrscheinlich enthalten. Enthaltungen sind bei Penrose nicht berücksichtigt. Im Folgenden wollen wir untersuchen, was für Auswirkungen auf den Machtindex des Bürgers es hat, wenn man im Modell Enthaltungen zulässt.

Vorbemerkung Schon in Kapitel 3 galt, dass beim Zählen der Koalitionen berücksichtigt werden muss, dass die Entscheidung des betrachteten Wählers B schon festgelegt ist. Dies müssten wir auch hier berücksichtigen. Allerdings haben wir auch gesehen, dass der Fehler, der bei Nichtbeachtung dieser Tatsache entsteht, für ausreichend große n verschwindend gering ist (3.11). Wir rechnen im Folgenden der Einfachheit halber also mit n Bürgern statt mit $n-1$.

4.1. Die Anzahl der möglichen Wahlausgänge

Jeder Bürger hat nunmehr 3 Möglichkeiten, abzustimmen: *Ja*, *Nein* und *Enthaltung*. Bei n Bürgern ergeben sich dadurch 3^n mögliche Konstellationen.

4.2. Die Anzahl an beeinflussbaren Konstellationen

Die Anzahl der beeinflussbaren Konstellationen $\widehat{K_b}'(x)$ ist gleich der Summe der Anzahl der beeinflussbaren Konstellationen mit keiner ($\widehat{K_{b,0}}(x)$), einer ($\widehat{K_{b,1}}(x)$), zwei ($\widehat{K_{b,2}}(x)$), ..., n_x ($\widehat{K_{b,n}}(x)$) Enthaltungen. Wenn sich i Bürger enthalten, gibt es, da diese i nunmehr keinerlei Einfluss haben, genauso viele beeinflussbare Konstellationen wie bei $(n-i)$ Wählern ohne Enthaltung, und das sind nach (3.11)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}}. \tag{4.1}$$

Nun muss noch berücksichtigt werden, dass es für verschiedene Anzahlen i von Enthaltungen auch verschieden viele Möglichkeiten gibt, wer sich enthält. Aus n Wählern i auszuwählen, die sich enthalten, ist auf $\binom{n}{i}$ Weisen möglich.

4.3. Zusammenfassung zum Machtindex

Also gilt für den Machtindex $\widehat{\beta_x}'$ bei Zulassung von Enthaltungen:

$$\widehat{\beta_x}' = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}}}{3^n} \tag{4.2}$$

Für $i=n$ wäre $\frac{1}{\sqrt{n-i}}$ nicht mehr definiert. Bei einer Abstimmung, an der sich niemand beteiligt (kollektive Enthaltung), kann es aber auch keine gewinnende Koalition geben. Daher betrachten wir nur den Fall, dass der Index i der Summe nur bis $n-1$ läuft.

4.4. Vereinfachung

Der recht komplizierte Term für den Machtindex soll nun vereinfacht werden. Hierzu bemerken wir zuerst, dass nach dem binomischen Lehrsatz gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i} \quad = \quad 3^n. \tag{4.3}$$

Wenn wir also statt $\frac{1}{\sqrt{n-i}}$ einen konstanten Faktor c hätten, der nicht von i abhängt, könnte dieser unbequeme Term „herausfallen“, da auch im Nenner 3^n steht. Wir suchen also nach einer solchen Konstanten, für die der Fehler, der beim Ersetzen von $\frac{1}{\sqrt{n-i}}$ entsteht, möglichst gering ist.

Betrachten wir hierfür die einzelnen Summanden von $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}$, also der Summe aus (4.2) ohne den Wurzelquotienten, den wir ja ersetzen wollen. Hierzu definieren wir eine Funktionenschar $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f_n(i) \quad = \quad \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i} \tag{4.4}$$

und untersuchen deren Verlauf. Mithilfe einer zweiten Funktionenschar

$$g_n(i) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{n-i}} \tag{4.5}$$

können wir $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}}$ schreiben als $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f_n(i) \cdot g_n(i)$. Wir wollen also f_n unverändert lassen, g_n aber durch eine konstante Funktion ersetzen.
In erster Näherung können wir f_n graphisch darstellen. Da die auftretenden Fakultäten allerdings Zahlenwerte liefern, die den für herkömmliche Computer darstellbaren Zahlbereich („Range“) überschreiten, ist dies nur für relativ kleine n möglich.

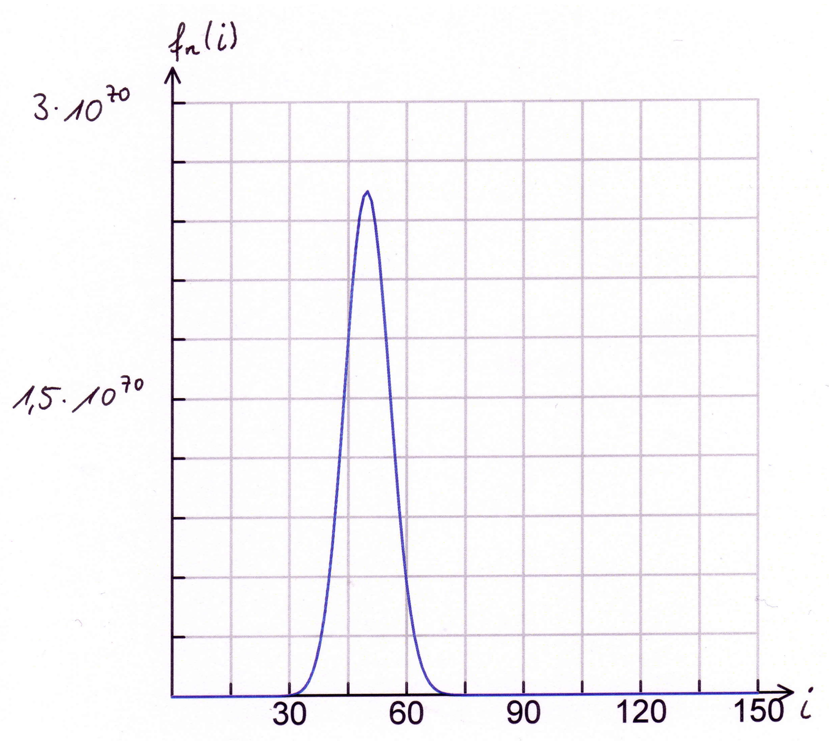

Abbildung 1: f_n für $n = 150$

Der Graph hat ein ausgeprägtes Maximum für $i \approx 50$ und fällt für kleinere und größere i steil ab. Verglichen mit dem sehr großen Wert beim Maximum ($f_n(50) \approx 2,55161 \cdot 10^{70}$) sind die Funktionswerte für $i < 30$ und $i > 70$ verschwindend gering.

Wir wollen nun die mathematische Begründung für diesen Verlauf finden. Hierzu wollen wir zunächst das Maximum allgemeingültig bestimmen. Die übliche Vorgehensweise der Bestimmung über die Nullstelle der ersten Ableitung kann hier jedoch nicht angewandt werden, da f_n nur für $i \in \mathbb{N}$ definiert und somit nicht stetig ist. Stattdessen untersuchen wir die relative Änderungsrate von f_n, wenn wir das Argument i um 1 erhöhen. Der Quotient

$$\frac{f_n(i+1)}{f_n(i)}$$

ist genau dann größer oder gleich 1, wenn der Graph monoton steigt, und kleiner als 1, wenn er monoton fällt. Wir vermuten, dass $\frac{f_n(i+1)}{f_n(i)}$ bis ungefähr $i = \frac{n}{3}$ größer oder gleich 1 ist, und für größere i kleiner als 1.

$$\begin{aligned}
\frac{f_n(i+1)}{f_n(i)} &\geq 1 \\
\Leftrightarrow \quad \frac{\binom{n}{i+1} \cdot 2^{n-i-1}}{\binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}} &\geq 1 \\
\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{n!}{(i+1)! \cdot (n-i-1)!} \cdot 2^{n-i-1}}{\frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot 2^{n-i}} &\geq 1 \\
\Leftrightarrow \quad \frac{i! \cdot (n-i)!}{(i+1)! \cdot (n-i-1)!} \cdot \frac{1}{2} &\geq 1 \\
\Leftrightarrow \quad \frac{n-i}{i+1} \cdot \frac{1}{2} &\geq 1 \\
\Leftrightarrow \quad n-i &\geq 2i+2 \\
\Leftrightarrow \quad \frac{n-2}{3} &\geq i
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Also hat f_n ein Maximum genau bei $i_0 = \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor \approx \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl, welche kleiner oder gleich x ist). Für genügend große n gilt weiterhin: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \approx \frac{n}{3}$, also

$$i_0 \approx \frac{n}{3} \tag{4.7}$$

Wenn wir als konstanten Faktor c nun $\frac{1}{\sqrt{n-i_0}}$ wählen, ist der entstehende Fehler sehr klein:

- Für den größten Summanden (den größten Wert von f_n) ist der Fehler Null, da wir die Konstante ja genau gleich dem Faktor gewählt haben, der diesem Summanden zugehörig ist.
- Für die nahe dem Maximum liegenden ebenfalls sehr großen Funktionswerte ist der Fehler sehr klein, da die Konstante von deren zugehörigen Faktoren besonders für große n nur wenig abweicht.
- Je weiter man sich vom Maximum entfernt, desto größer werden die Fehler, aber durch die nunmehr (relativ zum Maximum) sehr kleinen Funktionswerte von f_n fallen sie trotzdem kaum ins Gewicht.
- Zu guter letzt „mitteln“ sich einige der entstehenden Fehler „heraus“, weil die bei links vom Maximum liegenden i entstehenden Werte zu groß, für rechts davon liegende zu klein sind.

Wie in Abb. 6 (Anhang A.2) zu sehen, scheint der Quotient aus erhaltenem Näherungswert und Ausgangsterm für große n gegen 1 zu streben, wobei der Fehler schon früh sehr klein wird. Es liegt eine sehr gute Übereinstimmung mit dem vorhandenen Datenmaterial vor. Ein streng mathematischer Beweis für die Allgemeingültigkeit steht aber noch aus, es handelt sich hier „nur“ um eine Vermutung.

Es gilt damit:

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta_x}' &= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}}}{3^n} \\
&\approx \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i_0}}}{3^n} \\
&\overset{(4.7)}{\approx} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-\frac{n}{3}}}}{3^n} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{3^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}n}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}}{3^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}n}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}}{3^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}n}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{3^n}{3^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}n}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

woraus direkt folgt

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta_x}' &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} \\
\Rightarrow \qquad \beta_x' &\overset{!}{\sim} \sqrt{n}, \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

worin wir wieder das Quadratwurzelgesetz erkennen, lediglich mit einer anderen Proportionalitätskonstante, die aber für unsere Zwecke, wie schon weiter oben erwähnt, unerheblich ist.
Interessant ist, dass bei diesem anderen Ansatz, der zu einer grundverschiedener Rechnung führt, dasselbe Ergebnis, die Quadratwurzel, herausgekommen ist wie bei den Überlegungen, die zu Penrose's Gesetz geführt haben.

5. Vom Quadratwurzelgesetz zur Stimmenverteilung

5.1. Der Jagiellonische Kompromiss

Wie wir bereits in Kapitel 2 festgestellt haben, sind Machtverteilung (nach Banzhaf) und Stimmenverteilung in den meisten Fällen nicht äquivalent. Wir wollen nun eine Stimmenverteilung konstruieren, die das Quadratwurzelgesetz erfüllt, welches in den Kapiteln 3 und 4 als Voraussetzung für eine möglichst faire Stimmenverteilung ermittelt wurde. Die beiden polnischen Mathematiker Wojciech Słomczyński und Karol Życzkowski von der Jagiellonen-Universität in Krakau beschreiben eine solche Stimmenverteilung in ihrer Arbeit [7]. Ihr Modell wurde unter dem Namen „Jagiellonischer Kompromiss" bekannt.

Sie schlagen ein Abstimmungsverfahren vor, welches folgendes Kriterium beinhaltete: Die Stimmgewichte jedes Mitgliedstaats werden proportional zur Qudratwurzel der Einwohnerzahl verteilt; die Entscheidung des Rats gilt als gefallen, wenn die Summe der Stimmgewichte ein gewisses *Quorum R* übersteigt. Das Quorum ist der Anteil an befürwortenden Stimmen bei einer Abstimmung, der für einen erfolgreichen Beschluss notwendig ist. Ausgehend von den Populationen der (zum Zeitpunkt ihrer Veröffentlichung) 25 EU-Mitglieder (Stand 1. Januar 2003) analysierten sie die Machtindizes der Staaten in ihrem System als Funktionen des Quorums R. Die folgende Abbildung zeigt das Verhältnis von Banzhaf-Index $\beta_x(R)$ zu den Stimmgewichten, die proportional zu $\sqrt{n}$ (n: Bevölkerungszahl) gewählt sind, exemplarisch für fünf Staaten. Interessanterweise schneiden sich alle 25 Kurven näherungsweise in einem einzigen Punkt mit dem kritischen Quorum $R_{opt}^{25} = 62\%$.

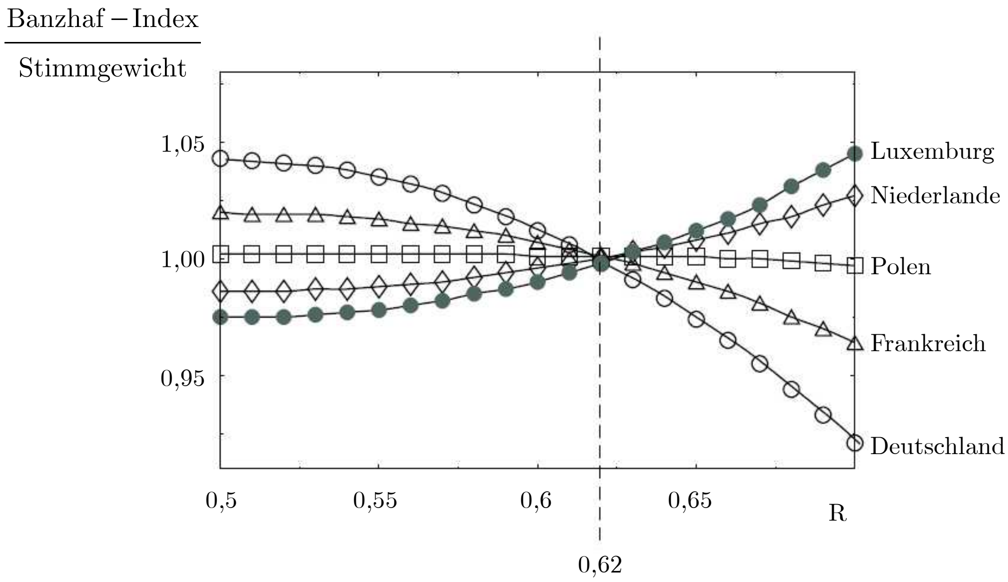

Abbildung 2: Verhältnis von Macht zu Stimmgewicht in Abhängigkeit vom Quorum R nach [7] mit freundlicher Genehmigung von Dr. Wojciech Słomczyński

Da die Werte der Quotienten bei diesem Schwellenwert sehr nahe an 1 liegen, was Słomczyński und Życzkowski in weiteren Untersuchungen belegen konnten, ist es möglich, den optimalen Wert für das Quorum anzugeben, bei dem der Machtindex praktisch gleich dem Stimmgewicht ist, und damit proportional zur Quadratwurzel aus der Bevölkerungszahl. Somit ist das Quadratwurzelgestz von Penrose quasi exakt erfüllt. Durch empirische Untersuchungen an verschiedenen Zusammensetzungen der EU bei zufälligen Populationen der Mitgliedstaaten fanden sie heraus, dass dieser Zusammenhang nicht auf die aktuelle Konstellation beschränkt ist, sondern allgemeingültig zu sein scheint. Ein streng mathematischer Beweis fehlt indes noch. Der Wert des Quorums strebt dabei mit steigender Zahl von EU-Mitgliedern gegen 50% (s. Abb. 5).
Für die EU-27 ist das optimale Quorum R_{opt}^{27} ca. 61,4%. Die Stimmenverteilung im Vergleich zum Machtindex ist in Abb. 4 im Anhang A.1 aufgeführt.

5.2. Der Vertrag von Lissabon

Wir wollen nun noch kurz das Wahlsystem betrachten, welches letztendlich 2007 im Vertrag von Lissabon beschlossen wurde. Für die meisten Abstimmungen soll dabei gelten: Ein Beschluss gilt als getroffen, wenn

1. mind. 55% der Mitgliedsstaaten zustimmen und
2. diese zusammen mind. 65% der EU-Bevölkerung repräsentieren.
3. Weiterhin muss eine blockierende Minderheit mind. aus vier Mitgliedstaaten gebildet werden.

Das erste Kriterium bedeutet, dass jeder Staat eine Stimme hat, das zweite ist gleichzusetzen mit dem Fall, dass das Stimmgewicht proportional zur Einwohnerzahl steigt. Das dritte hat auf die Machtindizes keinen signifikanten Einfluss, da es nur sehr wenige Konstellationen gibt, in denen seine Anwendung nötig wird.

Wenn man die Machtindizes der Mitgliedstaaten auf Grundlage dieses Abstimmungsverfahrens mit einem schnellen Computer berechnet (siehe etwa [7, 3]), so erhält man folgendes Ergebnis:

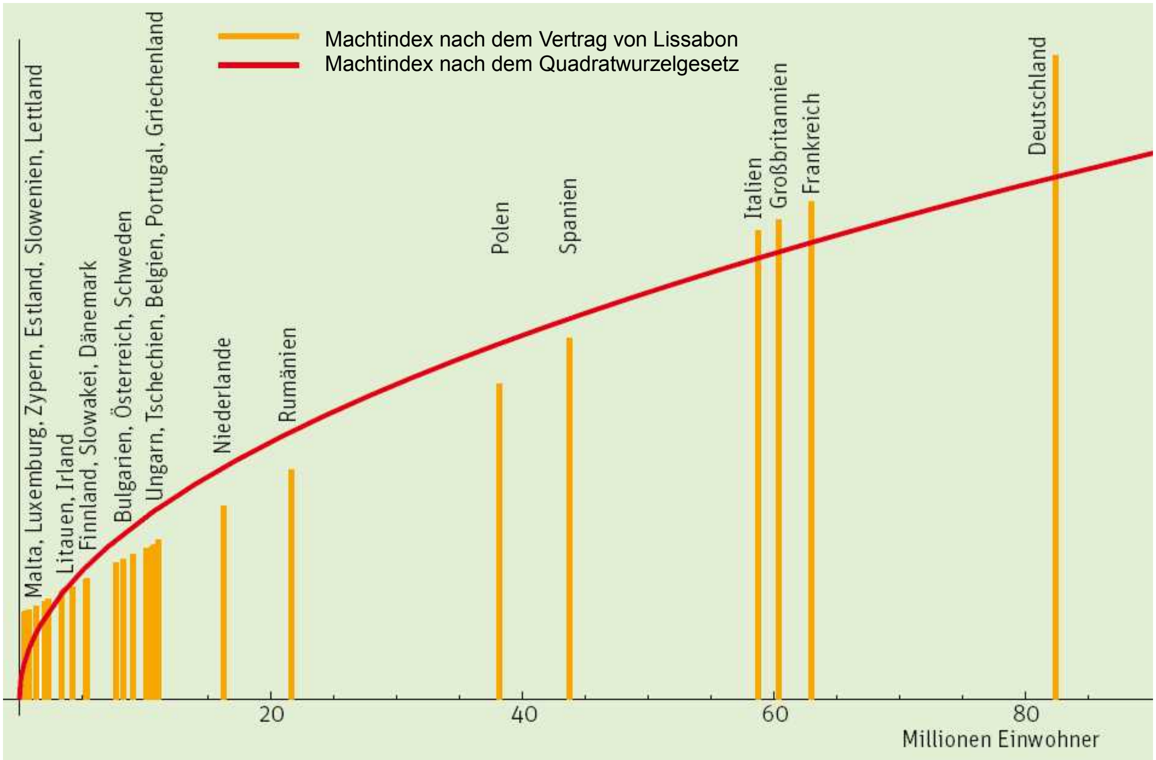

Abbildung 3: Macht der Mitgliedsstaaten der EU-27 nach dem Vertrag von Lissabon im Vergleich zum Quadratwurzelgesetz nach [5] mit freundlicher Genehmigung von Dr. Christoph Pöppe. Siehe auch Abb. 4 in A.1

Die Machtindizes, die der Vertrag von Lissabon durch sein Wahlsystem vorschreibt, werden hier mit denen verglichen, die die Mitgliedstaaten gemäß dem Quadratwurzelgesetz haben dürften. Es ist zu beobachten, dass die vier größten Staaten, insbesondere aber Deutschland, deutlich zu viel Macht haben, ebenso die kleinen wie etwa Malta. Dagegen sind die Staaten mit mittlerer Bevölkerung, insbesondere Polen, die Niederlande und Rumänien, unterrepräsentiert.

6. Fazit

6.1. Ergebnis

Wie wir gesehen haben, lässt sich die Macht eines Wählers (egal ob Bürger in einer Volksabstimmung oder Minister im Rat der EU) durch den Banzhaf'schen Machtindex ausdrücken. In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass er bei gleichen Stimmgewichten umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus der Anzahl der Wähler ist, und zwar sowohl, wenn man Enthaltungen zulässt, als auch, wenn man sie ausschließt. Damit die Bürger der EU alle gleichermaßen im Ministerrat repräsentiert werden, unabhängig, aus welchem Land sie stammen, müssen die Machtindizes der Mitgliedstaaten im Rat proportional zur Quadratwurzel ihrer Einwohnerzahl sein. Dieses Kriterium wird von einem Abstimmungsverfahren, welches unter dem Namen „Jagiellonischer Kompromiss" bekannt wurde, nahezu perfekt erfüllt. Dabei bekommt jeder Staat ein Stimmgewicht proportional zur Quadratwurzel der jeweiligen Einwohnerzahl zugewiesen und das Quorum wird auf einem bestimmten Wert festgesetzt, der für 27 Mitgliedstaaten bei 61,4% liegt und mit steigender Mitgliedszahl sinkt. Im Gegensatz zum Jagiellonischen Kompromiss weicht das Verfahren, welches der Vertrag von Lissabon vorschreibt, vom Quadratwurzelgesetz teilweise recht deutlich ab.

Die Einführung des Jagiellonischen Kompromisses als Wahlsystem für den Rat der EU hätte neben der bereits besprochenen Fairness in Bezug auf Repräsentation noch weitere Vorteile:

- Das System ist *einfach*, da es nur auf einem Kriterium beruht, während der Vertrag von Lissabon eine doppelte Mehrheit vorschreibt.
- Es ist *transparent*, da von der Stimmenverteilung direkt auf die Machtverteilung geschlossen werden kann.
- Durch die Größenordnung des Quorums sind Entscheidungen zugleich *qualifiziert*, da deutlich mehr als 50% der Stimmen benötigt werden, und *effizient*, da das Quorum nicht so hoch ist, dass eine Beschlussfassung unrealistisch erscheint.
- Das System ist *erweiterbar*. Bei weiteren EU-Beitritten von Staaten wie z.B. der Türkei muss das System bis auf eine kleine Korrektur am Quorum nicht geändert werden. Die Quorumsverminderung trägt ihrerseits wieder zur Effektivität bei, da bei einer größeren Zahl an Mitgliedern die Mehrheitsfindung und damit die Beschlussfassung erschwert ist.

6.2. Ausblick

Bei all unseren Berechnungen und theoretischen Betrachtungen über die Stimmenverteilung handelt es sich um mathematische Modelle. Wir haben in Kapitel 3 und Kapitel 4 zwei Modelle aufgestellt und untersucht, und sind in Kapitel 5 auf ein gemeinsames Ergebnis gekommen, welches die nach diesen Modellen ideale Stimmenverteilung angibt. Verbesserungen und weiterführende Betrachtungen sind nun vor allem beim Entwickeln neuer Modelle möglich. So gehen wir beispielsweise bei unseren Betrachtungen immer davon aus, dass alle Wähler ihre Stimme unabhängig voneinander abgeben. Werner Kirsch hat in seiner Arbeit [2] Modelle für abhängige Stimmabgabe entwickelt.

Weiterhin gehen alle bisher behandelten oder erwähnten mathematischen Modelle davon aus, dass das einzige Ziel bei einer gewichteten Stimmverteilung die möglichst gleiche Repräsentation der EU-Bürger ist. Natürlich können hier noch andere Kriterien eine Rolle spielen, beispielsweise die wirtschaftliche Bedeutung einzelner Staaten (Geber-/Nehmerstaaten). Dies wurde bisher in den Modellen noch kaum berücksichtigt. Welche Gesichtspunkte beim Entwurf eines Abstimmungssystems bedeutsam sein sollen, ist zumeist eine politische Entscheidung.

A. Anhang

A.1. Tabellen

Member state	Population (in millions)	Voting power (Constitution)	Voting weight (Penrose)	Voting power (Penrose)
Germany	82.54	11.87	9.55	9.54
France	59.64	8.74	8.11	8.12
United Kingdom	59.33	8.69	8.09	8.10
Italy	57.32	8.44	7.95	7.96
Spain	41.55	6.37	6.78	6.79
Poland	38.22	5.89	6.49	6.50
Romania	21.77	4.22	4.91	4.91
Netherlands	16.19	3.51	4.22	4.22
Greece	11.01	2.88	3.49	3.49
Portugal	10.41	2.80	3.39	3.39
Belgium	10.36	2.80	3.38	3.38
Czech Republic	10.20	2.78	3.35	3.35
Hungary	10.14	2.77	3.34	3.34
Sweden	8.94	2.63	3.14	3.14
Austria	8.08	2.52	2.98	2.98
Bulgaria	7.85	2.49	2.94	2.94
Denmark	5.38	2.19	2.44	2.44
Slovakia	5.38	2.19	2.44	2.44
Finland	5.21	2.17	2.39	2.39
Ireland	3.96	2.02	2.09	2.09
Lithuania	3.46	1.96	1.95	1.95
Latvia	2.33	1.82	1.61	1.61
Slovenia	2.00	1.78	1.48	1.48
Estonia	1.36	1.70	1.23	1.23
Cyprus	0.72	1.62	0.89	0.89
Luxembourg	0.45	1.59	0.70	0.70
Malta	0.40	1.58	0.66	0.66

Abbildung 4: Banzhaf-Index der EU-Mitglieder nach dem Vertrag von Lissabon („Constitution“) und dem Jagiellonischen Kompromiss („Penrose“). Nach [7] mit freundlicher Genehmigung von Dr. Wojciech Słomczyński

M	10	12	14	16	18	20	22	24	26
R^M_{opt}	66.0%	65.8%	64.6%	64.4%	63.4%	63.1%	62.6%	62.0%	61.4%

Abbildung 5: Optimales Quorum in Abhängigkeit von der Zahl der Mitgliedstaaten. Nach [7] mit freundlicher Genehmigung von Dr. Wojciech Słomczyński

A.2. Abbildungen

Folgendes Diagramm zeigt das Verhältnis der Näherung $\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ zum exakten Term $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-i} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}}}{3^n}$ (dargestellt als Quotient von Näherung durch exakten Wert) in Abhängigkeit von n.

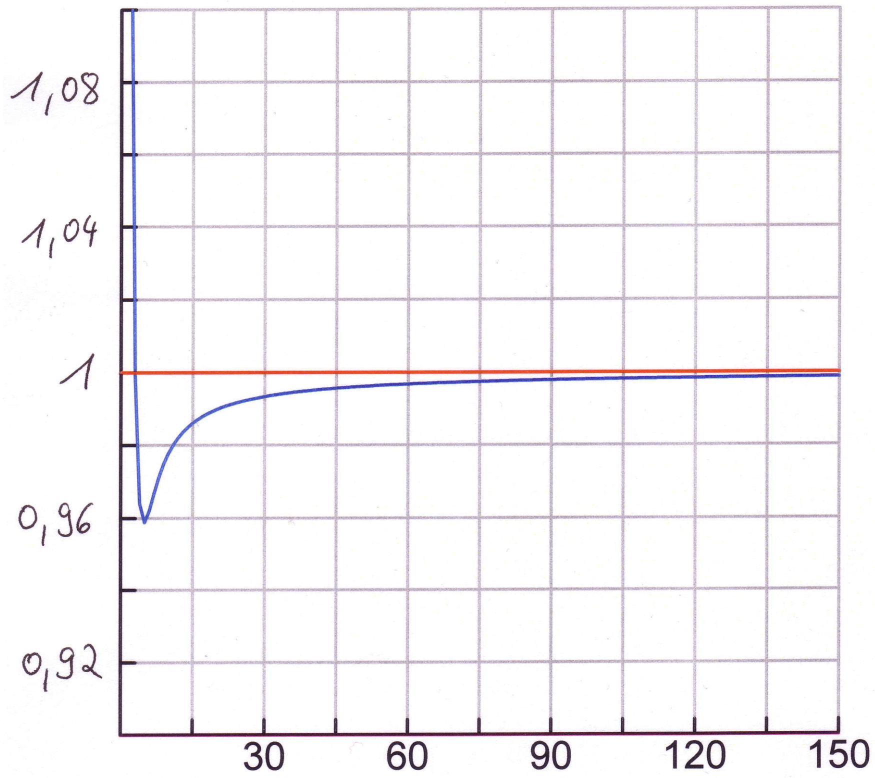

Abbildung 6: Genauigkeit der Abschätzung aus Abschnitt 4.4

A.3. Legende

In der Legende sind alle verwendeten Variablen mit ihrer Bedeutung aufgeführt.

- β_x: Banzhaf-Index des Staates x
- $\widehat{\beta_x}$: Banzhaf-Index eines Bürgers des Staates x
- $K_b(x)$: Anzahl der von x beeinflussbaren Koalitionen in einer Abstimmung
- $\widehat{K_b}(x)$: Anzahl der von einem Bürger aus x beeinflussbaren Koalitionen in einer Abstimmung
- $K_{ges}(x)$: Anzahl aller Koalition mit Beteiligung von x
- $\widehat{K_{ges}}(x)$: Anzahl aller Koalition mit Beteiligung eines Bürgers von x
- n: Bevölkerungszahl eines Mitgliedstaates

Ein Dach ($\widehat{\ }$) über einer Variablen bedeutet grundsätzlich, dass ein *Bürger* in einer Volksabstimmung betrachtet wird. Ist kein Dach über der Variablen, bezieht sich diese auf einen *Staat* im Ministerrat.

Literatur

[1] Otto Forster. *Analysis 1.* Vieweg, Wiesbaden, 9. edition, 2008.

[2] Werner Kirsch. On Penrose's square-root law and beyond. *Preprint*, 2007.

[3] Werner Kirsch. On the distribution of power in the Council of ministers of the EU. *Preprint*, 2007.

[4] Lionel Penrose. The Elementary Statistics of Majority Voting. *Journal of the Royal Statistical Society*, 109(1):53–57, 1946.

[5] Christoph Pöppe. Die Quadratwurzel, das Irrationale und der Tod. *Spektrum der Wissenschaft*, 8:102–105, 2007.

[6] Alan D. Taylor. *Mathematics and Politics.* Springer-Verlag, New York, 1. edition, 1995.

[7] Wojciech Słomczyński, Karol Życzkowski. Penrose voting system and optimal quota. *Acta Physica Polonica B*, 37(11):3133–3143, 2006.